Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + HGGSP, veuillez visiter :
bac-maths-hggsp.fr/annales-sujets-et-corriges

# ∽ Baccalauréat Amérique du Nord – 20 mai 2026 ∾

## Sujet 1

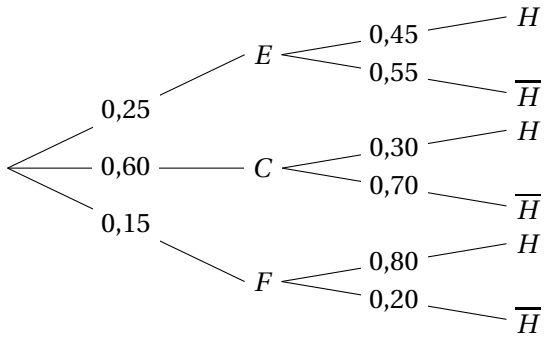
## ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

A. P. M. E. P.

## Exercice 1

### Partie A

1.




2. Calcul de $p(E \cap H)$ :

$$\begin{aligned} P(E \cap H) &= P(E) \times P_E(H) \\ &= 0{,}25 \times 0{,}45 \\ &= 0{,}112\,5 \end{aligned}$$

3. Les évènements $E$, $C$ et $F$ forment une partition de $\Omega$. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(H) &= P(E \cap H) + P(C \cap H) + P(F \cap H) \\ &= 0{,}112\,5 + (0{,}60 \times 0{,}30) + (0{,}15 \times 0{,}80) \\ &= 0{,}112\,5 + 0{,}18 + 0{,}12 \\ &= 0{,}412\,5 \end{aligned}$$

4. Calcul de $P_H(E)$ :

$$\begin{aligned} P_H(E) &= \frac{P(E \cap H)}{P(H)} \\ &= \frac{0{,}112\,5}{0{,}412\,5} \\ &\approx 0{,}273 \quad \text{(au millième près)} \end{aligned}$$

### Partie B

1. L'expérience consiste en la répétition de $n = 8$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (assimilable à un tirage avec remise). Le succès est « l'abonné a activé l'option », de probabilité $p = 0{,}412\,5$. Ainsi, $X$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(8\,;\,0{,}412\,5)$.

2. Calcul de $P(X = 0)$ :

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \binom{8}{0} \times 0{,}412\,5^0 \times (1 - 0{,}412\,5)^8 \\ &= 0{,}587\,5^8 \\ &\approx 0{,}014 \end{aligned}$$

3. (a) L'évènement contraire de « au moins un abonné a activé l'option » est « aucun abonné n'a activé l'option » :

$$\begin{aligned} q_n &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \binom{n}{0} \times 0{,}412\,5^0 \times 0{,}587\,5^n \\ &= 1 - 0{,}587\,5^n \end{aligned}$$

(b) On doit résoudre l'inéquation $q_n \geqslant 0.999$ :

$$\begin{aligned} q_n \geqslant 0{,}999 &\iff 1 - 0{,}587\,5^n \geqslant 0{,}999 \\ &\iff 0{,}587\,5^n \leqslant 0{,}001 \\ &\iff \ln(0{,}587\,5^n) \leqslant \ln(0{,}001) \quad \text{car ln est croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}587\,5)} \qquad \text{car } \ln(0{,}587\,5) < 0 \end{aligned}$$

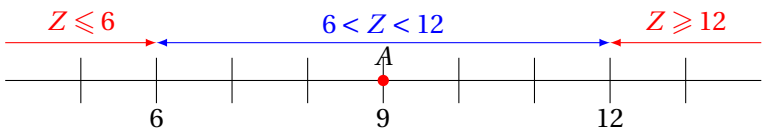
Comme $\dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}587\,5)} \approx 12{,}98$, la plus petite valeur de $n$ telle que $q_n \geqslant 0{,}999$ est 13.

## Partie C

1. Les valeurs possibles pour $Y$ sont : 5, 7, 10, 12, 16, 18.
2. Loi de $Y$ :

| $y_i$ | 5 | 7 | 10 | 12 | 16 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(Y = y_i)$ | 0,1375 | 0,1125 | 0,42 | 0,18 | 0,03 | 0,12 |

3. Calcul de $(EY)$ :
$$\begin{aligned} E(Y) &= 5 \times 0{,}137\,5 + 7 \times 0{,}112\,5 + 10 \times 0{,}42 + 12 \times 0{,}18 + 16 \times 0{,}03 + 18 \times 0.12 \\ &= 0{,}687\,5 + 0{,}787\,5 + 4{,}2 + 2{,}16 + 0{,}48 + 2{,}16 \\ &= 10{,}475 \end{aligned}$$
En moyenne, un abonné rapporte 10,48 € par mois à la plateforme (le millime n'existe pas).
4. À la calculatrice, on obtient une variance $V(Y) \approx 13{,}70$.
5. (a) $V(Z) = \sigma^2 = 2^2 = 4$.
   (b) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour tout réel $a > 0$ :
$$P(|Z - E(Z)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(Z)}{a^2}.$$
   (c) Avec $E(Z) = 9$ et $a = 3$, on a : $P(|Z-9| \geqslant 3) \leqslant \dfrac{4}{9}$. Le contraire de l'évènement $|Z-9| \geq 3$ est l'évènement $|Z-9| < 3$. Or $|Z-9| < 3 \Leftrightarrow -3 < Z-9 < 3 \Leftrightarrow 6 < Z < 12$.
   Notons que $\{|Z-9| \geq 3\} = \{Z \leq 6\} \cup \{Z \geq 12\}$.




Ainsi,
$$P(6 < Z < 12) = 1 - P(|Z-9| \geqslant 3) \geqslant 1 - \frac{4}{9},$$
donc
$$P(6 < Z < 12) \geqslant \frac{5}{9}.$$
Comme $\dfrac{5}{9} > \dfrac{4{,}5}{9} = 0{,}50$, l'affirmation est justifiée.

# Exercice 2

## Partie A

1. $u_1 = 4 - \dfrac{4}{u_0} = 4 - \dfrac{4}{4} = 3$. Il y aura 3 000 perches-soleil.
2. (a) La fonction $h$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
$$h'(x) \quad = \quad 0 - 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{4}{x^2}$$
Pour tout $x > 0$, $h'(x) > 0$. La fonction $h$ est donc strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

(b) Montrons par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$$
**Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $u_0 = 4$, $u_1 = 3$ et $u_2 = 4 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{8}{3} \approx 2{,}66$. On a bien $2 \leqslant u_2 \leqslant u_1 \leqslant 4$. La propriété est vérifiée au rang 0.
**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$, ($n \geqslant 0$ et $2 \leqslant h(u_{n+1}) \leqslant h(u_n) \leqslant 4$.
La fonction $h$ étant croissante sur $]0\,;\,+\infty[$, les images par celle-ci des quatre nombres précédents sont rangés dans le même ordre que ceux-ci :
$$h(2) \leqslant h(u_{n+1}) \leqslant h(u_n) \leqslant h(4).$$
Or $h(2) = 2$, $h(u_{n+1}) = u_{n+2}$, $h(u_n) = u_{n+1}$ et $h(4) = 3 \leqslant 4$. D'où
$$2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$
La propriété est vraie au rang $n+1$.
**Conclusion :**
La propriété est vraie au rang 0 et si elle vraie au rang $n$, elle l'est aussi au rang $n+1$ : d'après le principe de récurrence :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4}.$$

(c) En particulier
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n$ signifie que la suite $(u_n)$ est décroissante ;
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leqslant u_n$ signifie que la suite $(u_n)$ est minorée par 2

Minorée et décroissante la suite $u_n$ converge donc vers une limite $\ell$ qui vérifie $2 \leqslant \ell$.

(d) Comme quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = h(u_n) = 4 - \dfrac{4}{u_n}$ que la fonction $h$ est dérivable, donc continue sur $]0\,;\,+\infty[$, l'égalité précédente donne à la limite par continuité : $\ell = 4 - \dfrac{4}{\ell}$ la relation de récurrence $u_{n+1} = h(u_n)$, ($\ell$ est un point fixe de $h$).
$$\begin{aligned} \ell = 4 - \frac{4}{\ell} \quad &\iff \quad \ell^2 = 4\ell - 4 \\ &\iff \quad \ell^2 - 4\ell + 4 = 0 \\ &\iff \quad (\ell - 2)^2 = 0 \\ &\iff \quad (\ell - 2) = 0 \\ &\iff \quad \ell = 2 \end{aligned}$$
On a donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2}$

(e) La limite étant de 2 (soit 2 000 individus), ce modèle ne prévoit pas lui non plus d'élimination à long terme de l'espèce.

3. (a) Le script complété est :

```
def population(s) :
  u = 4
  n = 0
  while u >= s :
    u = 4 - 4/u
    n = n + 1
  return n
```

(b) En exécutant l'algorithme, on trouve que la commande `population(2.2)` renvoie $n = 10$. Cela signifie que c'est au bout de 10 ans (soit en 2035) que la population de perches-soleil passera en dessous de 2 200 individus pour la première fois.

**Partie B**

1. L'équation $(E)$ est une équation différentielle de la forme $ay' + by = c$, les solutions sont de la forme

$$y(t) = K\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t} + \frac{c}{a} = K\mathrm{e}^{-t} + 2, \text{ avec} K \in \mathbb{R}.$$

2. Calcul de $K$ en utilisant la condition initiale $p(0) = 4$. La fonction $p$ étant solution de $(E)$, on a $p(x) = K\mathrm{e}^{-x} + 2$. De plus :

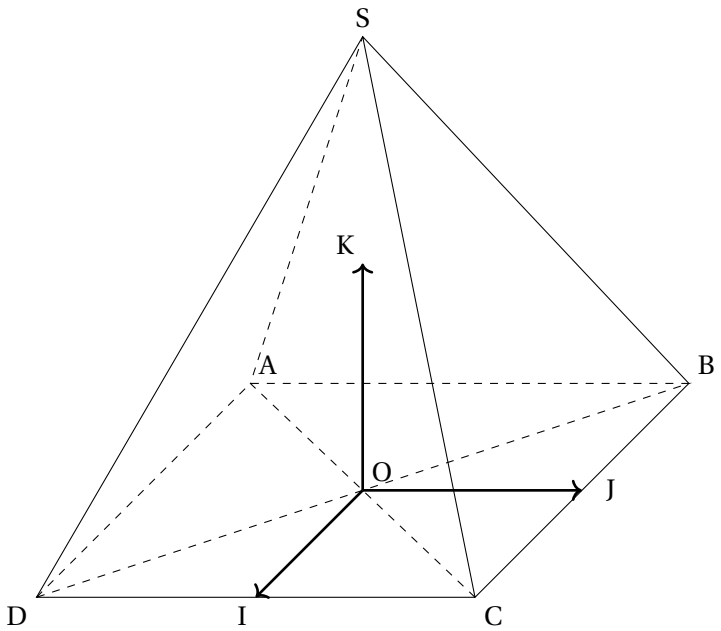
$$\begin{aligned} p(0) = 4 &\iff K\mathrm{e}^{0} + 2 = 4 \\ &\iff K + 2 = 4 \\ &\iff K = 2 \end{aligned}$$

La fonction $p$, qui est la solution de $(E)$ vérifiant $p(0) = 4$, est donc

$$\boxed{p(t) = 2\mathrm{e}^{-t} + 2}.$$

3. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t} = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} p(t) = 2$. Ce modèle continu prévoit également une stabilisation à 2 000 individus, sans élimination.

## Exercice 3



## Partie A

1. Puisque O est l'origine du repère et que la base carrée est de côté 2 avec le centre en O, on a A(−1 ; −1 ; 0) et D(1 ; −1 ; 0).
2. D'après la formule du produit scalaire :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SB} &= \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}\\ &= (1)(-1)+(1)(1)+(-2)(-2)\\ &= -1+1+4\\ &= 4\end{aligned}$$
3. D'après la définition géométrique du produit scalaire $\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SB} = SC\times SB\times\cos(\widehat{BSC})$. On a donc :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SB} &= SC\times SB\times\cos(\widehat{BSC})\\ 4 &= \sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}\times\sqrt{(-1)^2+1^2+(-2)^2}\times\cos(\widehat{BSC})\\ 4 &= \sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\cos(\widehat{BSC})\\ \cos(\widehat{BSC}) &= \frac{4}{6}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$
On en déduit $\widehat{BSC} = \arccos(\frac{2}{3}) \approx 48{,}2(°)$.

## Partie B

1. (a) Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (SBC) s'il est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires de ce plan, par exemple $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SC}$. Or :
$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{SB} = 0(-1)+2(1)+1(-2)=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{SC} = 0(1)+2(1)+1(-2)=0\end{cases}$$
On en déduit que $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SC}$, $\vec{n}$ est donc un vecteur normal au plan (SBC).

   (b) Le vecteur $\vec{n}(0,2,1)$ étant normal au plan (SBC), ce dernier admet une équation cartésienne de la forme $0x+2y+1z+d=0$. Le point S(0;0;2) appartient au plan (SBC), donc les coordonnées de ce point vérifie l'équation du plan (SBC) et on a donc $2(0)+1(2)+d=0 \iff d=-2$.
Une équation de (SBC) est donc bien
$$\boxed{2y+z-2=0}.$$
2. (a) La droite (OH) est perpendiculaire au plan (SBC) donc $\vec{n}$, qui est normal à (SBC), est aussi un vecteur directeur de (OH). Cette droite passe par O(0 ; 0 ; 0). Une représentation paramétrique est donc : $\begin{cases}x=0+0t=0\\ y=0+2t=2t\\ z=0+1t=t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$

   (b) H appartient à (OH) et à (SBC), on a donc :
   — $H\in(OH) \iff \exists t\in\mathbb{R}, \begin{cases}x_H = 0\\ y_H = 2t\\ z_H = t\end{cases}$
   — $H\in(SBC) \iff 2y_H+z_H-2=0$

   Le paramètre $t$, qui définit la position de H sur (OH), est donc solution de :
$$\begin{aligned}2(2t)+t-2=0 &\iff 5t=2\\ &\iff t=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{cases} x_{\text{H}} &= 0 \\ y_{\text{H}} &= 2\times\frac{2}{5} = \frac{4}{5} \\ z_{\text{H}} &= \frac{2}{5} \end{cases}$$

Les coordonnées de H, projeté orthogonal de O sur le plan (SBC) sont donc $\boxed{\left(0\,;\,\frac{4}{5}\,;\,\frac{2}{5}\right)}$.

(c) Calcul de la hauteur :

$$\begin{aligned} \text{OH} &= \sqrt{0^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{16}{25}+\frac{4}{25}} \\ &= \sqrt{\frac{20}{25}} = \frac{\sqrt{20}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

**Partie C**

1. (a) Volume de $SABCD$ :

$$\begin{aligned} V_{\text{SABCD}} &= \frac{1}{3}\times(2\times 2)\times 2 \\ &= \frac{8}{3}(\text{ cm}^3) \end{aligned}$$

(b) La pyramide OCBS a pour base le triangle OCB, dont l'aire est le quart de l'aire du carré ABCD (soit $\frac{1}{4}\times 4 = 1$), donc :

$$\begin{aligned} V_{\text{OCBS}} &= \frac{1}{3}\times\text{Aire(OCB)}\times\text{OS} \\ &= \frac{1}{3}\times 1\times 2 \\ &= \frac{2}{3}(\text{ cm}^3) \end{aligned}$$

2. Le triangle SBC est isocèle en S. La hauteur issue de S passe par J(milieu de [BC]). Les coordonnées de J sont (0 ; 1 ; 0). Ainsi :

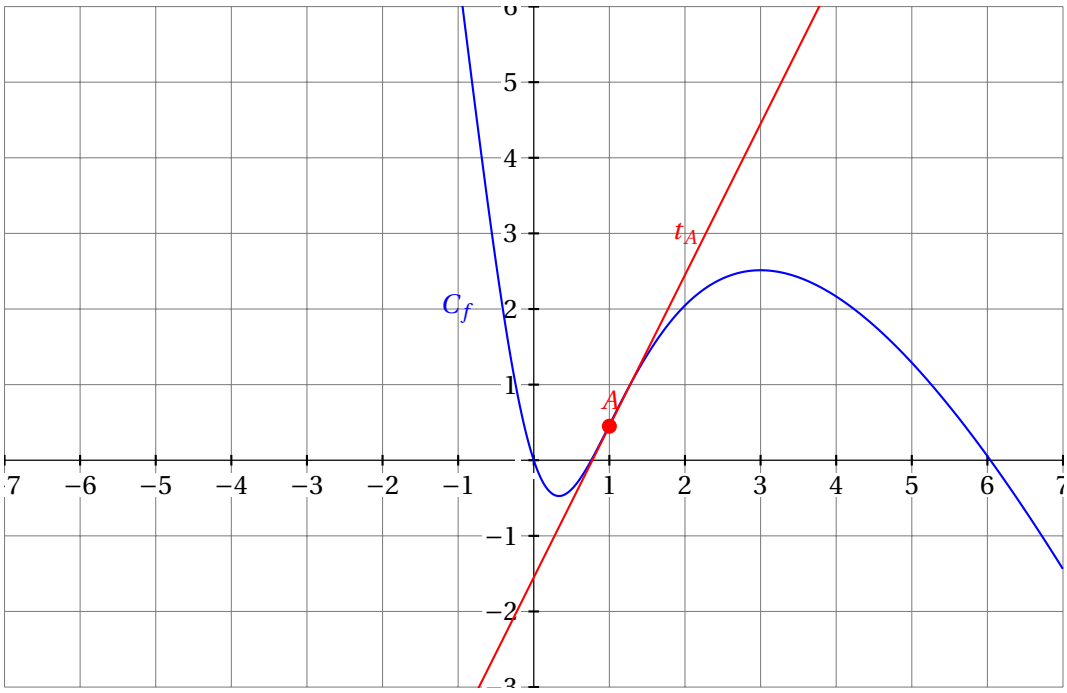
$$\begin{aligned} \text{SJ} &= \sqrt{0^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{5} \\ \text{Aire(SBC)} &= \frac{\text{BC}\times\text{SJ}}{2} = \frac{2\times\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$

3. On peut calculer le volume du tétraèdre OCBS en prenant pour base SBC et pour sommet O. Son volume est $V_{\text{OCBS}}$ s'exprime en fonction de l'aire de SCB et de la hauteur OH et est égal à $\frac{2}{3}$. En utilisant les deux questions précédentes, on obtient donc :

$$\begin{aligned} & V_{\text{OCBS}} = \frac{1}{3}\times\text{Aire(SBC)}\times d(\text{O},(\text{SBC})) \\ \iff\quad & \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\times\sqrt{5}\times d \\ \iff\quad & d = \frac{2}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5}\,\text{cm}} \end{aligned}$$

## Exercice 4

Étude de la fonction $f : x \mapsto 5\ln(x^2+1)-3x$.




1. Graphiquement, la courbe semble convexe sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ et concave sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.
2. Calcul de limite :

$$\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+1) & = & +\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X) & = & +\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\ln(x^2+1)=+\infty \text{(limite d'une composée)}$$

De plus :

$$\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(x^2+1) & = & +\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}-3x & = & +\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty \text{(somme de limites)}$$

3. (a) Pour tout $x>0$ :

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & 5\ln\left(x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right)-3x & \\ & = & 5\left(\ln(x^2)+\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right)-3x & \text{car } \ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)\\ & = & 10\ln(x)+5\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)-3x & \text{car } \ln(a^2)=2\ln(a)\\ & = & x\left(10\dfrac{\ln(x)}{x}-3\right)+5\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) & \end{array}$$

(b) Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$, on a donc :

$$\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(10\dfrac{\ln(x)}{x}-3\right) & = & -3\\ \lim\limits_{x\to+\infty}x & = & +\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}x\left(10\frac{\ln(x)}{x}-3\right)=-\infty \text{ (produit de limites)}$$

De plus :

$$\left.\begin{array}{rcl}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) & = & 1\\ \lim\limits_{X\to1}\ln(X) & = & 0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=0 \text{ (limite d'une composée)}$$

On a donc (somme de limites) :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

4. Variations de $f$ :

   (a) Calculons la dérivée de $f$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5\times\frac{2x}{x^2+1} - 3 \\ &= \frac{10x - 3(x^2+1)}{x^2+1} \\ &= \frac{-3x^2+10x-3}{x^2+1} \end{aligned}$$

   (b) Le signe de $f'(x)$ dépend du numérateur $-3x^2+10x-3$ ; en effet $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+1>0$. Le numérateur est un polynôme du second degré dont la représentation graphique est concave ($a<0$). Calculons ses racines :

$$\begin{aligned} \Delta &= 10^2 - 4\times(-3)\times(-3) = 100-36 = 64 \\ x_1 &= \frac{-10-8}{-6} = 3 \\ x_2 &= \frac{-10+8}{-6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

   On en déduit le tableau de variations suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $1/3$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Variations de $f$ | $+\infty$ | ↘ | $f(\frac{1}{3})$ | ↗ | $f(3)$ | ↘ | $-\infty$ |

   Avec $f(3) = 5\ln(10) - 9$ et $f(\frac{1}{3}) = 5\ln(\frac{10}{9}) - 1$.

5. On a $f''(x) = \frac{-10x^2+10}{(x^2+1)^2}$

   (a) Le signe de $f''(x)$ dépend uniquement du numérateur car $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2+1)^2 > 0$. Le numérateur est un polynôme du second degré dont la représentation graphique est concave ($a<0$). Ses racines sont : $-1$ et $1$. On en déduit que :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Convexité de $f$ | | Concave | | Convexe | | Concave | |

   La fonction est donc bien convexe sur $[-1\,;\,1]$ et concave ailleurs. La conjecture n'est pas validée car on ne voyait pas la courbe sur la partie $]-\infty\,;\,-1[$. La conjecture n'est pas validée.

(b) La tangente à $C_F$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$. Or :

$$\begin{aligned} f(1) &= 5\ln(2) - 3 \\ f'(1) &= \frac{-3+10-3}{2} = 2 \end{aligned}$$

L'équation de la tangente est donc

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \iff y = 2(x-1) + 5\ln(2) - 3 \iff \boxed{y = 2x - 5 + 5\ln(2)}.$$

(c) Pour $x \geqslant 1$, la fonction $f$ est concave, sa courbe $\mathscr{C}_f$ est donc située en dessous de ses tangentes, en particulier en dessous de la tangente en $A$. On a donc $\forall x \in [1\ ;\ +\infty[$ :

$$\begin{aligned} f(x) &\leqslant 2x - 5 + 5\ln(2) \\ 5\ln(x^2+1) - 3x &\leqslant 2x - 5 + 5\ln(2) \\ 5\ln(x^2+1) &\leqslant 5x - 5 + 5\ln(2) \\ \ln(x^2+1) &\leqslant x - 1 + \ln(2) \end{aligned}$$

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.