Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + HGGSP, veuillez visiter :
bac-maths-hggsp.fr/annales-sujets-et-corriges

Baccalauréat Amérique du Nord 22 mai 2025

A. P. M. E. P.

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

Partie A

On note N la variable aléatoire qui donne le nombre de paniers marqués.

Les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.

1. L'épreuve est effectuée 15 fois de façon indépendante et à chaque lancer la probabilité de marquer est égale à 0,32. N suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(15\,;\,0,32)$.

2. La probabilité que Victor réussisse exactement 4 paniers est :

$P(N=4) = \binom{15}{4} \times 0,32^4 \times (1-0,32)^{15-4} \approx 0,206$ au millième près.

3. La probabilité que Victor réussisse au plus 6 paniers est :

$P(N \leqslant 6) = P(N=0) + P(N=1) + \ldots + P(N=6) \approx 0,828$ (calculatrice).

4. On sait que : $E(N) = n \times p = 15 \times 0,32 = 4,8$.

Donc en moyenne sur 150 lancers, Victor marque 48 paniers.

5. **a.** Chaque lancer étant à 3 points, on a donc $T = 3N$.

b. On a $E(T) = E(3N) = 3E(N)$ d'après la linéarité de l'espérance, soit $E(T) = 3 \times 4,8 = 14,4$, donc une moyenne de 144 points marqués sur 150 lancers.

c. On a $P(12 \leqslant T = 3N \leqslant 18) = P(4 \leqslant N \leqslant 6)$.
Cette probabilité est égale à :
$P(4 \leqslant N \leqslant 6) = P(N=4) + P(N=5) + P(N=6) \approx 0,206 + 0,213 + 0,167$, soit

$$P(12 \leqslant T \leqslant 18) \approx 0,586.$$

Partie B

1. Dans cette question, on prend $n = 50$.

a. M_{50} représente la moyenne empirique, sur 50 matchs, des points marqués par Victor

b. • Chaque variable $X_1, \ldots, X_{50}$ suit la même loi que X donc on a :
$E(M_{50}) = E(X) = 22$;
• Comme les variables X_1, X_2,... $X_5 0$ sont indépendantes, on en déduit :
$V(M_{50}) = \dfrac{1}{50} V(X) = \dfrac{1}{50} \times 65 = \dfrac{65}{50} = \dfrac{130}{100} = 1,3$.

c. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, pour une variable aléatoire X d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$, pour tout réel $a > 0$:

$$P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$$

donc ici : $P(|M_{50} - E(M_{50})| \geqslant 3) \leqslant \dfrac{V(M_{50})}{3^2}$
Comme $\dfrac{V(M_{50})}{3^2} = \dfrac{1,3}{9} = \dfrac{13}{90}$, on a bien : $P(|M_{50} - 22| \geqslant 3) \leqslant \dfrac{13}{90}$.

d. L'événement « $19 < M_{50} < 25$ » revient à $|M_{50} - 22| < 3$ et
$P\big(|M_{50} - 22| < 3\big) = 1 - P\big(|M_{50} - 22| \geqslant 3\big)$.
Soit $P\big(|M_{50} - 22| \geqslant 3\big) \leqslant \dfrac{13}{90}$ entraîne $P\big(19 < M_{50} < 25\big) \geqslant 1 - \dfrac{13}{90} = \dfrac{77}{90} \approx 0,856$: cette probabilité est bien supérieure à 0,85.

2. D'après la loi faible des grands nombres, $\forall\, t \in \mathbb{R}^{*+}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\Big(|M_n - E(X)| \geqslant t\Big) = 0$,
donc en particulier ici, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\Big(|M_n - 22| \geqslant 3\Big) = 0$.

donc pour tout $r > 0$ il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, $P\big(|M_n - 22| \geqslant 3\big) < r$ et c'est vrai en particulier pour $r = 0,01$.

L'affirmation est donc fausse.

Autre méthode :

Pour tout réel $t > 0$, d'après l'inégalité de concentration, on a :

$P\big(|M_n - E(X)| \geqslant t\big) \leqslant \dfrac{V(X)}{t^2 n}$

Pour $t = 3$ on obtient : $P\big(|M_n - 22| \geqslant 3\big) \leqslant \dfrac{65}{n \times 3^2}$.

On veut donc que : $\dfrac{65}{9n} \leqslant 0,01 \iff \dfrac{6500}{9} \leqslant n$

$\iff 722 + \dfrac{2}{9} \leqslant n$

L'inégalité est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 723$.

EXERCICE 2 **5 points**

On désigne par (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

Partie A

1. **a.** $u_1 = \sqrt{u_0} = \sqrt{2}$
$u_2 = \sqrt{u_1} = \sqrt{\sqrt{2}}$.

b. À l'aide de la calculatrice, on peut conjecturer que la suite est décroissante et converge vers 1.

2. **a.** Posons, pour tout entier naturel n, l'affirmation P_n : « $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ ».
Initialisation : On a calculé $u_1 = \sqrt{2} \approx 1,414$ et $u_0 = 2$
On a donc bien $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$.
L'affirmation P_0 est donc vraie.
Hérédité : Soit n un entier naturel non nul. On suppose que l'affirmation P_n est vraie, c'est-à-dire que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
Montrons que l'affirmation P_{n+1} est vraie, c'est à dire que $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$
Par hypothèse de récurrence, on a :
$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \implies \sqrt{1} \leqslant \sqrt{u_{n+1}} \leqslant \sqrt{u_n}$
car la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$
$\implies 1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$

Si, pour n naturel, P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie également.

Conclusion : L'affirmation P_0 est vraie, et, pour tout entier naturel non nul n, la véracité de l'affirmation est héréditaire : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier naturel non nul n, on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

b. D'après la question précédente, pour tout entier n, $1 \leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est minorée par 1.

Et pour tout entier n, $u_{n+1} \leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante.

Or toute suite décroissante et minorée est convergente donc, la suite (u_n) est convergente vers une limite $\ell \geqslant 1$.

c. Soit $x \in [0\,;\,+\infty[$:

$$\begin{aligned}\sqrt{x} = x &\iff x = x^2 \text{ car } x \geqslant 0\\ &\iff x^2 - x = 0\\ &\iff x(x-1) = 0\\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 1\end{aligned}$$

L'équation $\sqrt{x} = x$ admet deux solutions sur $[0\,;\,+\infty[$: 0 et 1.

d. La suite (u_n) est convergente vers ℓ et est définie par récurrence par :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction racine carrée qui est continue sur $[0\,;\,+\infty[$.

D'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Nous avons résolu cette équation à la question précédente, les solutions sont 0 et 1, or d'après la question **A. 1. b.**, $\ell \geqslant 1$ donc $\ell = 1$.

donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

Partie B

1. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = \ln(u_{n+1})$

$$\begin{aligned}&= \ln\left(\sqrt{u_n}\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln(u_n)\\ &= \frac{1}{2}v_n\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \ln(u_0) = \ln(2)$.

b. On a donc, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = \ln(2)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{\ln(2)}{2^n}$.

c. Or, pour tout entier naturel n, $v_n = \ln(u_n)$ donc $\dfrac{\ln(2)}{2^n} = \ln(u_n)$ c'est à dire : $\ln(2) = 2^n \ln(u_n)$.

2. **a.** À l'aide de la calculatrice on trouve que pour tout $k < 7$, $u_k > 1{,}01$ et $u_7 \approx 1{,}00543$ donc $k = 7$.

b. On décide de prendre $x - 1$ comme approximation de $\ln(x)$ lorsque x appartient à l'intervalle $]0{,}99\,;\,1{,}01[$ donc $\ln(u_7) \approx u_7 - 1 \approx 0{,}00543$.

c. D'après les questions **1. c.** et **2. b.** de la **partie B** une approximation de $\ln(2)$ est $2^7 \ln(u_7)$ soit $2^7 \times 0{,}00543$ c'est à dire 0,695.

3. On généralise la méthode précédente à tout réel a strictement supérieur à 1.

```
from math import*
def Briggs(a):
  n = 0
  while a >= 1.01:
    a = sqrt(a)
    n = n+1
  L =2**n *(a-1)
return L
```

EXERCICE 3 **5 points**

PARTIE A

Affirmation 1 : Vraie

$\overrightarrow{JH} = \overrightarrow{JF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EH}$

$= \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

$= \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DH} + 2\overrightarrow{BI} - \overrightarrow{CB}$

$= \overrightarrow{DM} + 2\overrightarrow{BI} + -\overrightarrow{CB}$

Affirmation 2 : Fausse

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}$

On peut exprimer $\overrightarrow{AG}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$: les trois vecteurs sont coplanaires et donc le triplet de vecteurs $\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AH}\ ,\ \overrightarrow{AG}\right)$ n'est pas une base de l'espace.

Affirmation 3 : Vraie

$\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IK}$ car $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{IK}$

$= \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IA}$ car A est le projeté orthogonal de K sur la droite (AB)

$= -IB \times IA$ car les vecteurs sont colinéaires de sens contraire

$= -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2}$ car l'arête est de longueur 1 et I est le milieu de l'arête [AB]

$= -\dfrac{1}{4}$

PARTIE B

Affirmation 4 : Fausse

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne $2x - y + 3z + 6 = 0$, le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est donc un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

On est dans un repère orthonormé donc :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n} = 3 \times 2 + (-3) \times (-1) + 8 \times 3 = 6 + 3 + 24 \neq 0$

Le vecteur normal au plan et le vecteur directeur de la droite ne sont pas orthogonaux donc le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AB) ne sont pas parallèles.

Affirmation 5 : Vraie

Méthode 1 :

Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles donc le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ est aussi un vecteur normal au plan $\mathscr{P}'$.

Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}'$ est donc de la forme : $2x-y+3z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$.

De plus, le point B appartient au plan $\mathscr{P}'$ donc $2x_B-y_B+3z_B+d=0$

D'où $2\times5+3+3\times7+d=0$ donc $10+3+21+d=0$ ce qui équivaut à $d=-34$.

Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}'$ est donc : $2x-y+3z-34=0$.

En multipliant par -1 on obtient l'équation donnée.

Méthode 2 :

Le plan $\mathscr{P}'$ a pour équation cartésienne $-2x+y-3z+34=0$, le vecteur $\vec{n'}\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$ est donc un vecteur normal au plan $\mathscr{P}'$.

$\vec{n'}=-\vec{n}$ donc les vecteurs normaux aux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont colinéaires et donc les deux plans sont parallèles.

Vérifions si le point B appartient au plan $\mathscr{P}'$.

$-2x_B+y_B-3z_B+34=-2\times5-3-3\times7+34=-10-3-21+34=0$

Donc le point B appartient au plan $\mathscr{P}'$.

Donc le plan $\mathscr{P}'$ parallèle à $\mathscr{P}$ passant par B a bien pour équation cartésienne $-2x+y-3z+34=0$.

Affirmation 6 : Vraie

La distance du point A au plan $\mathscr{P}$ est égale à la distance AH avec H projeté orthogonal de A sur le plan $\mathscr{P}$.

Déterminons les coordonnées du point H.

H est le projeté orthogonal du point A sur la plan $\mathscr{P}$, c'est donc l'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite Δ orthogonale au plan $\mathscr{P}$ passant par le point A.

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$, c'est donc un vecteur directeur de la droite Δ.

De plus le point A$(2\ ;\ 0\ ;\ -1)$ appartient à la droite Δ, une représentation paramétrique de la droite Δ est donc :

$$\begin{cases} x &= 2+2t\\ y &= 0-t\\ z &= -1+3t\end{cases}\quad,\text{ où } t\in\mathbb{R}$$

L'intersection entre la droite Δ et le plan $\mathscr{P}$ donne l'équation en la variable t :

$$\begin{aligned}2(2+2t)-(-t)+3(-1+3t)+6=0 &\iff 4+4t+t-3+9t+6=0\\ &\iff 14t=-7\\ &\iff t=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Le point H d'intersection entre la droite Δ et $\mathscr{P}$ est le point de paramètre $t=-\dfrac{1}{2}$ dans la représentation paramétrique de la droite Δ.

Il a comme coordonnées : $\text{H}\left(2-2\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ -1-3\times\dfrac{1}{2}\right)$ soit $\text{H}\left(1\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ -\dfrac{5}{2}\right)$.

On a donc :

$\overrightarrow{\text{AH}}\begin{pmatrix}-1\\ \dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{3}{2}\end{pmatrix}$

d'où : $\left\|\overrightarrow{\text{AH}}\right\|^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{14}{4}$, donc $\left\|\overrightarrow{\text{AH}}\right\| = \sqrt{\frac{14}{4}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

La distance du point A au plan $\mathscr{P}$ est égale à $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Affirmation 7 : Fausse

(d) est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\-5\end{pmatrix}$ et la droite (AB) par $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}3\\-3\\8\end{pmatrix}$.

Les deux droites ont des vecteurs directeurs non colinéaires donc les droites ne sont ni parallèles, ni confondues.

La droite (AB) passe par le point A et est dirigée par $\overrightarrow{\text{AB}}$ donc une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\begin{cases} x &= 2+3t \\ y &= 0-3t \\ z &= -1+8t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

(d) et (AB) seront donc coplanaires si et seulement si ces deux droites sont sécantes, c'est-à-dire si et seulement si le système suivant a une solution :

$$\begin{cases} 2+3t = -12+2k \\ -3t = 6 \\ -1+8t = 3-5k \end{cases} \iff \begin{cases} -4 = -12+2k \\ t = -2 \\ -17 = 3-5k \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} k = 4 \\ t = -2 \\ k = 4 \end{cases}$$

Le système admet une solution, donc les droites ont un point commun : le point de paramètre $t = -2$ de la droite (AB) ou le point de paramètre $k = 4$ de (d) c'est à dire le point C$(-4\,;\,6\,;\,-17)$.

Les droites (AB) et (d) sont donc sécantes et par conséquent coplanaires.

EXERCICE 4 **5 points**

PARTIE A

1. **a.** Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,\pi]$:
$f'(x) = \text{e}^x \times \sin(x) + \text{e}^x \times \cos(x) = \text{e}^x\big(\sin(x) + \cos(x)\big)$.

b. Par connaissance des fonctions trigonométriques, pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x) \geqslant 0$ et $\sin(x) \geqslant 0$

On précise que d'une part, $\sin(x) = 0$ seulement pour $x = 0$, et $cos(0) = 1$, et d'autre part, $\cos(x) = 0$ seulement pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$, donc les fonctions sinus et cosinus ne s'annulent pas en même temps.

La somme de deux réels positifs, dont l'un au moins est strictement positif est strictement positive, donc :

pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x) + \sin(x) > 0$.

D'autre part, pour tout réel x, $\text{e}^x > 0$

donc pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\quad f'(x) > 0$ en tant que produit de deux facteurs strictement positifs,

donc la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. **a.** L'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est : $y = f'(0)(x-0) + f(0) = f'(0)x + f(0)$.

$f(0) = \mathrm{e}^0 \sin(0) = 1 \times 0 = 0$; (donné dans l'énoncé)

$f'(0) = \mathrm{e}^0 (\sin(0) + \cos(0)) = 1 \times (0+1) = 1$ (donné dans l'énoncé)

L'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est donc $y = 1x + 0$ soit $y = x$.

b. En anticipant la question **3.**, on va étudier la convexité de la fonction sur $[0\,;\,\pi]$.

Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\pi]$:

$f''(x) = \mathrm{e}^x (\sin(x) + \cos(x)) + \mathrm{e}^x (\cos(x) - \sin(x))$

$= \mathrm{e}^x (\sin(x) + \cos(x) + \cos(x) - \sin(x))$.

$= 2\mathrm{e}^x \cos(x)$

On a le tableau de signes suivant :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	

donc pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $f''(x) > 0$

d'où la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

c. La courbe représentative d'une fonction convexe est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier ici, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0, d'équation $y = x$ (d'après la question précédente).

On a donc, pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\quad \mathrm{e}^x \sin(x) \geqslant x$.

3. On a vu précédemment que la dérivée seconde de f s'annule en changeant de signe en $x = \dfrac{\pi}{2}$ donc le point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction f est un point d'inflexion.

PARTIE B

On note

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. $x \longmapsto \mathrm{e}^x \sin(x)$ est de la forme uv' avec $\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad u'(x) = \mathrm{e}^x \\ v'(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad v(x) = -\cos(x) \end{cases}$

Les fonctions u et v sont continues et dérivables sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$

d'où $I = \Big[-\cos(x)\mathrm{e}^x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x(-\cos(x))\,\mathrm{d}x$

$= -\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + \cos(0)\mathrm{e}^0 + \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\cos(x)\,\mathrm{d}x$

$= 0 + 1 + J$

$= 1 + J$

$x \longmapsto \mathrm{e}^x\sin(x)$ est de la forme uv' avec $\begin{cases} u(x) = \sin(x) & \text{et} \quad u'(x) = \cos(x) \\ v'(x) = \mathrm{e}^x & \text{et} \quad v(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$

Les fonctions u et v sont continues et dérivables sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$

d'où $I = \Big[\sin(x)\mathrm{e}^x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\cos(x)\,\mathrm{d}x$

$= -\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + \sin(0)\mathrm{e}^0 - J$

$= \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - J$

On a donc bien :

$$I = 1 + J \qquad \text{et} \qquad I = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - J.$$

2. En ajoutant les deux équations précédentes on obtient : $2I = 1 + J + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - J$.

d'où $I = \dfrac{1 + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2}$.

3. D'après la question **Partie A 2.c.** pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$,

$\mathrm{e}^x\sin(x) \geqslant x$ c'est à dire $f(x) \geqslant g(x)$.

L'aire du domaine hachuré situé entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$ est donc égale à l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\mathrm{e}^x\sin(x) - x\right)\mathrm{d}x$.

$\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\mathrm{e}^x\sin(x) - x\right)\mathrm{d}x$

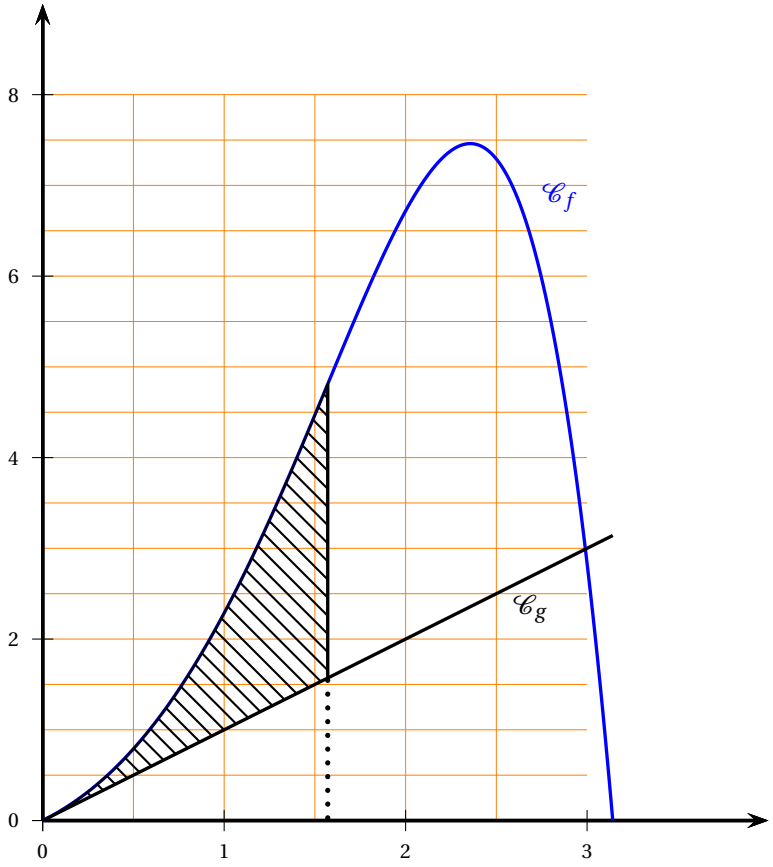
$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}x$ par linéarité de l'intégrale

$= I - \left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \dfrac{1 + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 + 0$

$= \dfrac{1 + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \dfrac{\pi^2}{8}$

L'aire cherchée est donc $\dfrac{1 + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \dfrac{\pi^2}{8}$ u.a. ($\approx 1{,}67$ u. a.)


8
6
4
2
0
0
1
2
3
$\mathscr{C}_f$
$\mathscr{C}_g$

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.