Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + HGGSP, veuillez visiter :
bac-maths-hggsp.fr/annales-sujets-et-corriges

A. P. M. E. P.

Corrigé du Baccalauréat Polynésie

Sujet 1 – 5 septembre 2024

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Exercice 1 — 5 points

Une concession automobile vend deux sortes de véhicules :

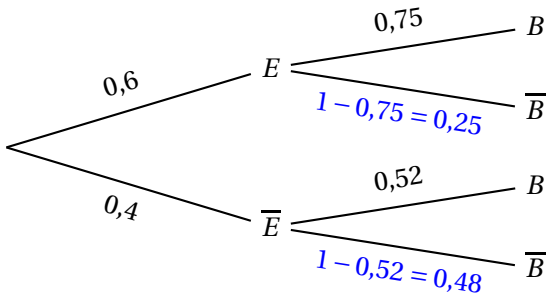
- 60 % sont des véhicules tout-électrique ;
- 40 % sont des véhicules hybrides rechargeables.

75 % des acheteurs de véhicules tout-électrique et 52 % des acheteurs de véhicules hybrides ont la possibilité matérielle d'installer une borne de recharge à domicile.

On choisit un acheteur au hasard et on considère les évènements suivants :

- E : « l'acheteur choisit un véhicule tout-électrique » ;
- B : « l'acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile ».

On crée un arbre pondéré résumant la situation.



1. La probabilité que l'acheteur choisisse un véhicule tout-électrique et qu'il ait la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile est :
   $P(E \cap B) = P(E) \times P_E(B) = 0{,}6 \times 0{,}75 = 0{,}45$.
2. D'après la formule des probabilités totales :
   $P(B) = P(E \cap B) + P\left(\overline{E} \cap B\right) = 0{,}45 + 0{,}4 \times 0{,}52 = 0{,}658$.
3. Un acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile.

   La probabilité qu'il choisisse un véhicule tout-électrique est :
   $P_B(E) = \dfrac{P(E \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}45}{0{,}658} \approx 0{,}684$.
4. On choisit un échantillon de 20 acheteurs. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre total d'acheteurs pouvant installer une borne de recharge à leur domicile parmi l'échantillon de 20 acheteurs.

a. On est dans le cas d'une répétition avec remise d'une expérience n'ayant que 2 issues : la possibilité d'installer une borne de recharge, avec la probabilité $p = 0{,}658$, ou non. Donc la variable aléatoire X qui donne le nombre total d'acheteurs pouvant installer une borne de recharge à leur domicile suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}658$.

b. $P(X = 8) = \binom{20}{8} \times 0{,}658^8 \times (1 - 0{,}658)^{20-8} \approx 0{,}011$

c. La probabilité qu'au moins 10 acheteurs puissent installer une borne de recharge est : $P(X \geqslant 10) = 1 - P(X \leqslant 9) \approx 1 - 0{,}045\,2 \approx 0{,}955$

d. L'espérance de X est : $E(X) = np = 20 \times 0{,}658 = 13{,}16$.

e. La directrice de la concession décide d'offrir l'installation de la borne de recharge aux acheteurs ayant la possibilité d'en installer une à leur domicile. Cette installation coûte 1 200 €.

L'espérance de X représente le nombre moyen de clients pouvant installer une borne de recharge à leur domicile. L'installation d'une borne coûte 1 200 €.

Il faut donc prévoir : $13{,}16 \times 1\,200$ soit 15 792 €.

Exercice 2 — 6 points

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + x$.

Affirmation A : La fonction f admet pour tableau de variations le tableau ci- dessous :

x	$-\infty$		$+\infty$
variations de f	$-\infty$	↗	$+\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $f'(x) = \mathrm{e}^x + 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Affirmation A vraie

Affirmation B : L'équation $f(x) = -2$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
variations de f	$-\infty$	↗ -2 ↗	$+\infty$

La fonction f est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et va de $-\infty$ à $+\infty$. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -2$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

Affirmation B fausse

2. Affirmation C : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)-x^2+2}{3x^2} = -\dfrac{1}{3}$.

Pour $x \neq 0$, on a : $\dfrac{\ln(x)-x^2+2}{3x^2} = \dfrac{x^2\left(\frac{\ln(x)}{x^2}-1+\frac{2}{x^2}\right)}{3x^2} = -\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}\right)$

- $\dfrac{\ln(x)}{x^2} = \dfrac{\ln(x)}{x}\times\dfrac{1}{x}$

  On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$; donc par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$.
- On sait aussi que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^2} = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}\right) = 1$ et donc que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)-x^2+2}{3x^2} = -\dfrac{1}{3}$.

Affirmation C vraie

3. On considère la fonction k définie et continue sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = 1+2\,\mathrm{e}^{-x^2+1}$.

Affirmation D : Il existe une primitive de la fonction k décroissante sur $\mathbb{R}$.

Toute primitive K de la fonction k a pour dérivée k. Or, pour tout réel X, on a $\mathrm{e}^X > 0$. Donc pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^{-x^2+1} > 0$, donc $1+2\,\mathrm{e}^{-x^2+1} > 0$, et donc $k(x) > 0$.

La primitive K a donc une dérivée toujours strictement positive, donc elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Affirmation D fausse

4. On considère l'équation différentielle (E) : $3y' + y = 1$.

Affirmation E : La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}+1$ est solution de l'équation différentielle (E) avec $g(0) = 5$.

- $g(x) = 4\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}+1$ donc $g(0) = 4\,\mathrm{e}^0+1 = 4+1 = 5$
- g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 4\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} = -\dfrac{4}{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}$.

  Donc $3g'(x)+g(x) = 3\times\left(-\dfrac{4}{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}\right)+\left(4\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}+1\right) = -4\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}+4\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}+1 = 1$

  Donc la fonction g est solution de l'équation différentielle (E).

Affirmation E vraie

5. Affirmation F : Une intégration par parties permet d'obtenir : $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1-2\,\mathrm{e}^{-1}$.

En prenant : $\begin{cases} u(x) &= x \\ v'(x) &= \mathrm{e}^{-x} \end{cases}$, on a : $\begin{cases} u'(x) &= 1 \\ v(x) &= -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$

Cela donne par intégration par parties :

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\,\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = -\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-1}+1 = 1-2\,\mathrm{e}^{-1}.$$

Affirmation F vraie

Exercice 3 — 4 points

On considère une pyramide à base carrée formée de boules identiques empilées les unes sur les autres :

- le 1er étage, situé au niveau le plus haut, est composé de 1 boule ;
- le 2e étage, niveau juste en dessous, est composé de 4 boules ;
- le 3e étage possède 9 boules ;
- ...
- le n-ième étage possède n^2 boules.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n le nombre de boules qui composent le n-ième étage en partant du haut de la pyramide. Ainsi, $u_n = n^2$.

1. Le nombre total de boules d'une pyramide de 4 étages est :
$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$.

2. On considère la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

a. $S_5 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = \left(u_1 + u_2 + u_3 + u_4\right) + u_5 30 + 5^2 = 55$

Le nombre total de boules d'une pyramide de 5 étages est : $S_5 = 55$.

b. On complète la fonction `pyramide` ci-dessous de sorte que, pour tout entier naturel non nul n, l'instruction `pyramide(n)` renvoie le nombre de boules composant une pyramide de n étages.

```
def pyramide(n) :
    S = 0
    for i in range(1, n+1) :
        S = S + i**2
    return S
```

c. Pour tout entier naturel n :

- $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(2n^2+n)}{6} + \dfrac{6(n+1)^2}{6}$
$= \dfrac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{8}$
$= \dfrac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$
- $\dfrac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \dfrac{(n+1)(2n^2+3n+4n+6)}{6}$
$= \dfrac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$

Donc $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}$

d. On démontre par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$: $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- **Initialisation**

  Pour $n = 1$, on a $S_1 = 1$ et $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6} = \dfrac{1\times 2\times 3}{6} = 1$

  Donc la propriété est vraie au rang 1.
- **Hérédité**

  On suppose la propriété vraie au rang n, avec $n \geqslant 1$, c'est-à-dire $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
  C'est l'hypothèse de récurrence.

  $S_{n+1} = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1} = \left(u_1 + u_2 + \cdots + u_n\right) + u_{n+1}$

  $= S_n + (n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

  $= \dfrac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}$ (d'après la question précédente)

  $= \dfrac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}$

  Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 1, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 1$.
  Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

On a donc démontré par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$: $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Un marchand souhaite disposer des oranges en pyramide à base carrée. Il possède 200 oranges.

Il faut donc trouver le plus grand entier n tel que $S_n \leqslant 200$.

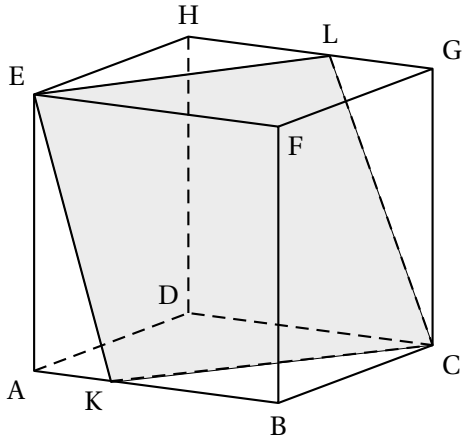
On calcule : $S(7) = \dfrac{7(7+1)(2\times 7+1}{6} = 140 < 200$ et $S(8) = \dfrac{8(8+1)(2\times 8+1)}{6} = 204 > 200$.

Le marchand utilise donc 140 oranges pour construire une pyramide à 7 étages.

Exercice 4 — 5 points

On considère un cube ABCDEFGH et l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.
Pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$, on considère les points K et L de coordonnées :

$\text{K}(m\,;\,0\,;\,0)$ et $\text{L}(1-m\,;\,1\,;\,1)$.



1. Le point E a pour coordonnées $(0\,;0\,;1)$.

Comme $\overrightarrow{\text{AC}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AD}}$, le point C a pour coordonnées $(1\,;1\,;0)$.

2. Dans cette question, $m = 0$. Ainsi, le point L $(1\,;1\,;1)$ est confondu avec le point G, le point K$(0\,;0\,;0)$ est confondu avec le point A et le plan (LEK) est donc le plan (GEA).

a.
- ABCD est un carré donc ses diagonales sont perpendiculaires, donc $\overrightarrow{\text{DB}} \perp \overrightarrow{\text{AC}}$.
- Le vecteur $\overrightarrow{\text{AE}}$ est normal au plan (ABD) donc $\overrightarrow{\text{AE}}$ est orthogonal à tout vecteur du plan (ABD), donc $\overrightarrow{\text{AE}} \perp \overrightarrow{\text{DB}}$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{\text{AE}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ ne sont pas colinéaires.

Le vecteur $\overrightarrow{\text{DB}}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (GEA) donc le vecteur $\overrightarrow{\text{DB}}$ est normal au plan (GEA).

b. On déduit de la question précédente que le plan (GEA) a une équation de la forme $1 \times x + (-1) \times y + 0 \times z + d = 0$, soit $x - y + d = 0$.

Le plan (GEA) passe par le point A de coordonnées $(0\,;0\,;0)$ donc $0-0+d=0$ et donc $d=0$.

Le plan (GEA) a donc pour équation $x - y = 0$.

On s'intéresse désormais à la nature de CKEL en fonction du paramètre m.

3. Dans cette question, m est un réel quelconque de l'intervalle $[0\,;1]$.

a.
- $\text{K}\begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\text{E}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\text{KE}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0-m \\ 0-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $\text{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\text{L}\begin{pmatrix} 1-m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\text{CL}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1-m-1 \\ 1-1 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{\text{KE}} = \overrightarrow{\text{CL}}$ donc CKEL est un parallélogramme.

b. $\text{K}\begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\text{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\text{KC}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1-m \\ 1-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-m \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{\text{KC}} \cdot \overrightarrow{\text{KE}} = x_{\overrightarrow{\text{KC}}} \times x_{\overrightarrow{\text{KE}}} + y_{\overrightarrow{\text{KC}}} \times y_{\overrightarrow{\text{KE}}} + z_{\overrightarrow{\text{KC}}} \times z_{\overrightarrow{\text{KE}}} = (1-m) \times (-m) + 1 \times 0 + 0 \times (-1) = m(m-1)$

c. CKEL est un rectangle si, et seulement si, CKEL possède un angle droit
si, et seulement si, $\overrightarrow{\text{KC}} \perp \overrightarrow{\text{KE}}$
si, et seulement si, $\overrightarrow{\text{KC}} \cdot \overrightarrow{\text{KE}} = 0$
si, et seulement si, $m(m-1) = 0$
si, et seulement si, $m = 0$ ou $m = 1$

4. Dans cette question, $m = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, L a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,1\,;\,1\right)$ et K a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,0\,;\,0\right)$.

a.
- $\text{K}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\text{L}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\text{KL}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $\text{E}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\text{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\text{EC}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- $\overrightarrow{\text{KL}} \cdot \overrightarrow{\text{EC}} = 0 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$ donc $\overrightarrow{\text{KL}} \perp \overrightarrow{\text{EC}}$

Le parallélogramme CKEL a ses diagonales perpendiculaires donc c'est un losange.

b.
- $\overrightarrow{\text{KC}} \cdot \overrightarrow{\text{KE}} = m(m-1)$; or $m = \dfrac{1}{2}$ donc $\overrightarrow{\text{KC}} \cdot \overrightarrow{\text{KE}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-1\right) = -\dfrac{1}{4}$

- $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = KC \times KE \times \cos\left(\widehat{CKE}\right)$
- $\overrightarrow{KC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1-m \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

  Donc $KC^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 0^2 = \frac{5}{4}$ donc $KC = \frac{\sqrt{5}}{2}$
- $\overrightarrow{KE}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -m \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  Donc $KE^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2 = \frac{5}{4}$ donc $KE = \frac{\sqrt{5}}{2}$

On a donc : $-\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \cos\left(\widehat{CKE}\right)$

Donc $-\frac{1}{4} = \frac{5}{4} \times \cos\left(\widehat{CKE}\right)$ et donc $\cos\left(\widehat{CKE}\right) = -\frac{1}{5}$

On en déduit avec la calculatrice que $\widehat{CKE} \approx 101{,}5°$, soit $\widehat{CKE} \approx 102°$.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.