Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + HGGSP, veuillez visiter :
bac-maths-hggsp.fr/annales-sujets-et-corriges

Mathématiques

Session 2023 • Amérique du Sud • Jour 1

Code sujet **23-MATJ1AS1** 4 heures

Proposition de corrigé pédagogique • FormaV

Se repérer dans le corrigé

Exercice 1 — Étude de fonctions logarithmiques et de tangentes
11 réponses • sujet p. 2–3

Exercice 2 — Probabilités : accouchements multiples et jumeaux
7 réponses • sujet p. 4–5

Exercice 3 — Géométrie dans l’espace : sphère, plan et tétraèdre
8 réponses • sujet p. 6–6

Exercice 4 — Suites récurrentes et modèle d’évolution d’une population
8 réponses • sujet p. 7–7

Les numéros, parties et pages renvoient au sujet original. Chaque réponse rappelle la consigne, explique la démarche et donne le résultat.

Exercice 1

5 points

Étude de fonctions logarithmiques et de tangentes

Partie A

Question 1.

Sujet p. 2

On considère la fonction f définie sur]0 ; +∞[par f(x) = 1 + x² − 2x² ln(x). Justifier que $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ et, en remarquant que f(x) = 1 + x²(1 − 2 ln(x)), justifier que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Lorsque $x \to 0^+$, on a $x^2 \to 0$ et $x^2 \ln(x) \to 0$. En effet, en posant $t = 1/x$, on obtient $x^2 \ln(x) = -\frac{\ln(t)}{t^2}$, qui tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$. Ainsi, dans $f(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln(x)$, les deux derniers termes tendent vers 0.

Lorsque $x \to +\infty$, on écrit $f(x) = 1 + x^2(1 - 2\ln(x))$. Le facteur $1 - 2\ln(x)$ tend vers $-\infty$, et x^2 tend vers $+\infty$ en restant positif. Leur produit tend donc vers $-\infty$; l'ajout de 1 ne change pas cette limite.

RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Question 2.

Sujet p. 2

Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle]0 ; +∞[, f'(x) = −4x ln(x).

Sur $]0; +\infty[$, la dérivée de $x^2 \ln(x)$, calculée avec la formule de dérivation d'un produit, est $2x \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln(x) + x$. Par conséquent,

$$f'(x) = 2x - 2\big(2x \ln(x) + x\big) = -4x \ln(x).$$

RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\boxed{f'(x) = -4x \ln(x)}$.

Question 3.

Sujet p. 2

Étudier le signe de f'(x) sur l'intervalle]0 ; +∞[, puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur cet intervalle.

Comme $x > 0$, le facteur $-4x$ est négatif : le signe de $f'(x) = -4x \ln(x)$ est donc l'opposé de celui de $\ln(x)$. Or $\ln(x) < 0$ si $0 < x < 1$, $\ln(1) = 0$, et $\ln(x) > 0$ si $x > 1$. De plus, $f(1) = 1 + 1 - 2\ln(1) = 2$. En utilisant les limites de la question 1, on obtient le tableau suivant.

RÉPONSE À RETENIR

$f'(x) > 0$ sur $]0; 1[$, $f'(1) = 0$, et $f'(x) < 0$ sur $]1; +\infty[$.

x	0^+	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$
Variations de f	1	↗ 2	↘ $-\infty$

Question 4.

Sujet p. 2

> Démontrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α dans [1 ; +∞[et que α ∈ [1 ; e]. On admet ensuite que l'équation f(x) = 0 n'admet pas de solution sur]0 ; 1].

La fonction f est continue sur $[1;e]$ et strictement décroissante sur cet intervalle, d'après la question précédente. On a $f(1)=2>0$ et, puisque $\ln(e)=1$, $f(e)=1+e^2-2e^2=1-e^2<0$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure donc l'existence d'une solution $\alpha\in]1;e[$ à $f(x)=0$. La stricte décroissance de f sur $[1;+\infty[$ assure que cette solution y est unique.

RÉPONSE À RETENIR

L'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $[1;+\infty[$, et $\boxed{\alpha\in[1;e]}$ (même $\alpha\in]1;e[$).

Question 5. Proposition A

Sujet p. 2

> La fonction Python donnée est appelée dans la console par dichotomie(1). Parmi les quatre propositions, recopier celle affichée par cette instruction et justifier la réponse (on pourra procéder par élimination). Proposition A : (1.75, 1.9031250000000002).

La première valeur testée par le programme est le milieu de $[1;2{,}7]$, soit $1{,}85$. On a $f(1)>0$ et $f(1{,}85)\approx 0{,}212>0$. Le test $f(a)f((a+b)/2)<0$ est donc faux à cette étape et le programme remplace a par $1{,}85$. Cette borne inférieure ne peut ensuite que rester égale ou augmenter : le programme ne peut pas retourner $1{,}75$. Le tracé des étapes donne finalement $(1{,}85;1{,}9031250000000002)$.

RÉPONSE À RETENIR

La proposition A, $(1.75,\ 1.9031250000000002)$, n'est pas affichée. Le résultat est la proposition B.

Question 5. Proposition B

Sujet p. 2

> La fonction Python donnée est appelée dans la console par dichotomie(1). Parmi les quatre propositions, recopier celle affichée par cette instruction et justifier la réponse (on pourra procéder par élimination). Proposition B : (1.85, 1.9031250000000002).

On suit la boucle avec $p=1$, donc elle s'arrête lorsque $b-a\leq 0{,}1$. Au départ, $(a,b)=(1;2{,}7)$. Les milieux successifs sont $1{,}85$, $2{,}275$, $2{,}0625$, $1{,}95625$ et $1{,}903125$. La valeur de f au premier milieu est positive ($f(1{,}85)\approx 0{,}212$); aux quatre suivants, elle est négative. Comme $f(a)>0$ après la première étape, le programme conserve donc $a=1{,}85$ et remplace successivement b par ces quatre derniers milieux. À la fin, $b-a=1{,}903125-1{,}85=0{,}053125\leq 0{,}1$, donc la boucle s'arrête.

RÉPONSE À RETENIR

La proposition affichée est $\boxed{\text{B : }(1.85,\ 1.9031250000000002)}$.

Question 5. Proposition C

Sujet p. 2

> La fonction Python donnée est appelée dans la console par dichotomie(1). Parmi les quatre propositions, recopier celle affichée par cette instruction et justifier la réponse (on pourra procéder par élimination). Proposition C : (2.75, 2.9031250000000002).

La borne supérieure initiale est $b = 2{,}7$. À chaque passage dans la boucle, le programme remplace une borne par le milieu de l'intervalle : aucune borne ne peut donc dépasser cette borne supérieure initiale. La borne supérieure 2.9031250000000002 de la proposition C est ainsi impossible. Le tracé des étapes de la dichotomie donne $(1{,}85; 1{,}9031250000000002)$.

> **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La proposition C, $(2.75,\ 2.9031250000000002)$, n'est pas affichée. Le résultat est la proposition B.

Question 5. Proposition D

Sujet p. 2

> La fonction Python donnée est appelée dans la console par dichotomie(1). Parmi les quatre propositions, recopier celle affichée par cette instruction et justifier la réponse (on pourra procéder par élimination). Proposition D : (2.85, 2.9031250000000002).

Comme pour la proposition C, la borne supérieure donnée dans la proposition D, 2.9031250000000002, est supérieure à la borne initiale $2{,}7$. Elle ne peut donc pas être obtenue par les mises à jour du programme. Le tracé des étapes donne l'intervalle final $(1{,}85; 1{,}9031250000000002)$.

> **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La proposition D, $(2.85,\ 2.9031250000000002)$, n'est pas affichée. Le résultat est la proposition B.

Partie B

Question 1.

Sujet p. 3

> On considère la fonction g définie sur]0 ; +∞[par g(x) = ln(x)/(1 + x²). Démontrer que, pour tout réel x de cet intervalle, g′(x) = f(x)/[x(1 + x²)²].

Pour $x > 0$, on dérive le quotient $g(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$:

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - 2x\ln(x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1 + x^2 - 2x^2\ln(x)}{x(1+x^2)^2}.$$

Le numérateur $1 + x^2 - 2x^2\ln(x)$ est précisément $f(x)$.

> **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\boxed{g'(x) = \dfrac{f(x)}{x(1+x^2)^2}}$.

Question 2.

Sujet p. 3

> Démontrer que la fonction g admet un maximum en x = α. On admet que g(α) = 1/(2α²).

Le dénominateur $x(1+x^2)^2$ est strictement positif pour tout $x > 0$. Le signe de $g'(x)$ est donc celui de $f(x)$. Sur $]0;1[$, la fonction f est croissante et sa limite en 0 est 1; elle y est donc positive. Sur $[1;+\infty[$, elle décroît, avec $f(1) = 2 > 0$ et un unique zéro α. Ainsi $f(x) > 0$ pour $0 < x < \alpha$ et $f(x) < 0$ pour $x > \alpha$. Par conséquent, g est croissante jusqu'à α, puis décroissante : elle admet un maximum en $x = \alpha$. La valeur de ce maximum est celle admise dans l'énoncé.

RÉPONSE À RETENIR

g admet un maximum global en $\boxed{x = \alpha}$, de valeur $\boxed{g(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha^2}}$.

Question 3.

Sujet p. 3

> On note T_1 la tangente à la courbe Cg au point d'abscisse 1 et Tα la tangente à Cg au point d'abscisse α. Déterminer, en fonction de α, les coordonnées du point d'intersection des droites T_1 et Tα.

On a $g(1) = 0$ et, d'après la question 1, $g'(1) = \frac{f(1)}{1(1+1^2)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. L'équation de la tangente en 1 est donc $T_1 : y = \frac{1}{2}(x-1)$.

En $x = \alpha$, on a $f(\alpha) = 0$, donc $g'(\alpha) = 0$. La tangente T_α est horizontale et a pour équation $y = g(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$. À l'intersection, on résout $\frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{2\alpha^2}$, ce qui donne $x = 1 + \frac{1}{\alpha^2}$.

RÉPONSE À RETENIR

Le point d'intersection de T_1 et T_α a pour coordonnées $\boxed{\left(1 + \dfrac{1}{\alpha^2}\ ;\ \dfrac{1}{2\alpha^2}\right)}$.

Exercice 2

5 points

Probabilités : accouchements multiples et jumeaux

Question 1.a

Sujet p. 4

> Entre 1998 et 2020, en France, 18 221 965 accouchements ont été recensés, parmi lesquels 293 898 ont donné naissance à des jumeaux et 4 921 à au moins trois enfants. Avec une précision de 0,1 %, calculer, parmi tous les accouchements recensés, le pourcentage d'accouchements donnant naissance à des jumeaux sur la période 1998-2020.

Le pourcentage recherché est le quotient du nombre d'accouchements ayant donné naissance à des jumeaux par le nombre total d'accouchements, multiplié par 100 :

$$\frac{293\,898}{18\,221\,965} \times 100 \approx 1{,}6129\ \%.$$

Arrondi au dixième de pour cent, cela donne $1{,}6\ \%$.

RÉPONSE À RETENIR

Entre 1998 et 2020, environ **1,6 %** des accouchements recensés ont donné naissance à des jumeaux.

Question 1.b

Sujet p. 4

> Entre 1998 et 2020, en France, 18 221 965 accouchements ont été recensés, parmi lesquels 4 921 ont donné naissance à au moins trois enfants. Vérifier que le pourcentage d'accouchements ayant donné naissance à au moins trois enfants est inférieur à 0,1 %. On considère alors que ce pourcentage est négligeable.

Le pourcentage d'accouchements ayant donné naissance à au moins trois enfants vaut :

$$\frac{4\,921}{18\,221\,965} \times 100 \approx 0{,}0270\ \%.$$

Comme $0{,}0270\ \% < 0{,}1\ \%$, le pourcentage demandé est bien inférieur à $0{,}1\ \%$.

RÉPONSE À RETENIR

Le pourcentage est d'environ **0,027 %**, donc il est inférieur à **0,1 %** et peut être considéré comme négligeable.

Question 2.a

Sujet p. 4

> Dans la suite de l'exercice, un accouchement est soit ordinaire, soit double, avec des probabilités respectives de 0,984 et de 0,016. Un jour donné, les n accouchements réalisés dans une maternité sont indépendants. X désigne le nombre d'accouchements doubles pratiqués ce jour. Dans le cas où n = 20, préciser la loi de probabilité suivie par X et calculer la probabilité qu'on réalise exactement un accouchement double. Les probabilités calculées dans la suite sont arrondies au millième.

Chaque accouchement est indépendant des autres et a une probabilité $0{,}016$ d'être double. La variable X, qui compte le nombre d'accouchements doubles parmi 20 accouchements, suit donc une loi binomiale de paramètres 20 et $0{,}016$:

$$X \sim \mathcal{B}(20 ; 0{,}016).$$

La probabilité d'obtenir exactement un accouchement double est :

$$P(X=1) = \binom{20}{1}(0{,}016)(0{,}984)^{19} \approx 0{,}2355.$$

Arrondie au millième, cette probabilité vaut $0{,}236$.

> **RÉPONSE À RETENIR**
>
> X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20; 0{,}016)$, et la probabilité de réaliser exactement un accouchement double est **0,236** au millième.

Question 2.b

Sujet p. 4

> Dans les mêmes conditions, par la méthode de votre choix que vous expliciterez, déterminer la plus petite valeur de n telle que P(X ≥ 1) ≥ 0,99. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice. Les probabilités calculées sont arrondies au millième.

La probabilité qu'aucun des n accouchements ne soit double est $0{,}984^n$. Ainsi,

$$P(X \geq 1) = 1 - 0{,}984^n.$$

On cherche le plus petit entier n tel que $1 - 0{,}984^n \geq 0{,}99$, soit $0{,}984^n \leq 0{,}01$. En prenant les logarithmes, puis en tenant compte du fait que $\ln(0{,}984) < 0$, on obtient :

$$n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}984)} \approx 285{,}5.$$

Le plus petit entier qui convient est donc 286. En effet, pour $n = 285$, $1 - 0{,}984^{285} \approx 0{,}9899 < 0{,}99$, tandis que pour $n = 286$, $1 - 0{,}984^{286} \approx 0{,}9901 \geq 0{,}99$.

> **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La plus petite valeur est $n = 286$. Il faut donc réaliser au moins 286 accouchements dans la journée pour que la probabilité d'en avoir au moins un de double soit d'au moins 99 %.

Question 3.a

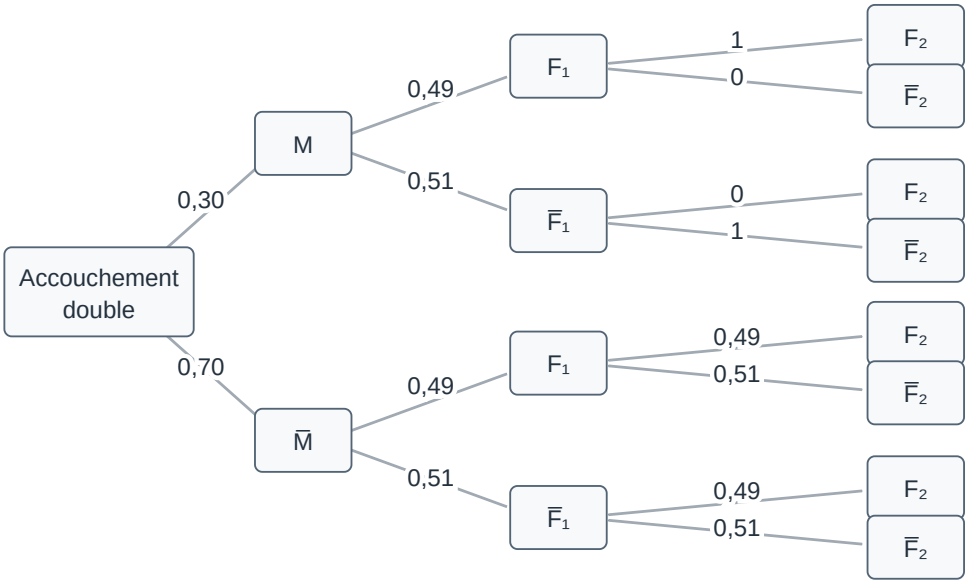
Sujet p. 5

> Parmi les naissances doubles, on estime qu'il y a 30 % de jumeaux monozygotes et 70 % de jumeaux dizygotes. Pour les naissances doubles, la probabilité qu'un nouveau-né soit une fille est 0,49 et celle qu'il soit un garçon est 0,51. Pour des jumeaux dizygotes, le sexe du second nouveau-né est indépendant de celui du premier. On choisit au hasard un accouchement double et on considère les événements M : « les jumeaux sont monozygotes », F_1 : « le premier nouveau-né est une fille » et F_2 : « le second nouveau-né est une fille ». Recopier puis compléter l'arbre pondéré fourni.

La première branche distingue les jumeaux monozygotes, de probabilité $0{,}30$, des dizygotes, de probabilité $0{,}70$. Dans les deux cas, le premier nouveau-né est une fille avec probabilité $0{,}49$, et un garçon avec probabilité $0{,}51$.

Pour des jumeaux monozygotes, les deux enfants sont obligatoirement de même sexe : après une fille en premier, le second est une fille avec probabilité 1 ; après un garçon en premier, le second est un garçon avec probabilité 1. Pour des dizygotes, l'indépendance des sexes donne les probabilités $0{,}49$ et $0{,}51$ pour le second nouveau-né, quelle que soit l'issue concernant le premier.

Arbre pondéré des naissances doubles



Les branches conditionnelles après M traduisent le fait que les jumeaux monozygotes sont de même sexe ; après $\overline{\text{M}}$, les sexes sont indépendants.

RÉPONSE À RETENIR

L'arbre complété porte les probabilités indiquées sur chaque branche ; $\overline{F_1}$ et $\overline{F_2}$ désignent respectivement un premier et un second nouveau-né garçons.

Question 3.b

Sujet p. 5

> Montrer que la probabilité que les deux nouveau-nés soient des filles est 0,31507.

On décompose l'événement « les deux nouveau-nés sont des filles » selon que les jumeaux sont monozygotes ou dizygotes.

Pour des jumeaux monozygotes, les deux enfants sont des filles dès lors que le premier est une fille : la probabilité conditionnelle vaut $0{,}49$. Pour des jumeaux dizygotes, les sexes sont indépendants : la probabilité que les deux soient des filles vaut $0{,}49^2$. Par la formule des probabilités totales :

$$P(F_1 \cap F_2) = 0{,}30 \times 0{,}49 + 0{,}70 \times 0{,}49^2 = 0{,}147 + 0{,}16807 = 0{,}31507.$$

RÉPONSE À RETENIR

La probabilité que les deux nouveau-nés soient des filles est bien $0{,}31507$.

Question 3.c

Sujet p. 5

> Les deux nouveau-nés sont des jumelles. Calculer la probabilité qu'elles soient monozygotes.

On cherche la probabilité que les jumeaux soient monozygotes sachant que les deux nouveau-nés sont des filles. Par la formule de probabilité conditionnelle :

$$P(M \mid F_1 \cap F_2) = \frac{P(M \cap F_1 \cap F_2)}{P(F_1 \cap F_2)}.$$

La probabilité au numérateur vaut $0{,}30 \times 0{,}49 = 0{,}147$, car des jumeaux monozygotes dont le premier est une fille sont nécessairement deux filles. D'après la question précédente, le dénominateur vaut $0{,}31507$. Donc :

$$P(M \mid F_1 \cap F_2) = \frac{0{,}147}{0{,}31507} \approx 0{,}46656.$$

Au millième, cette probabilité s'arrondit à $0{,}467$.

> **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sachant que les deux nouveau-nés sont des filles, la probabilité qu'elles soient monozygotes est **0,467** au millième.

Exercice 3

5 points

Géométrie dans l'espace : sphère, plan et tétraèdre

Question 1.a

Sujet p. 6

> Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère A(0 ; 4 ; 16), B(0 ; 4 ; −10), C(4 ; −8 ; 0) et K(0 ; 4 ; 3). La sphère S est de centre K et de rayon 13. Vérifier que le point C appartient à S.

La sphère $\mathcal{S}$ est de centre $K(0;4;3)$ et de rayon 13. Calculons la distance de K à $C(4;-8;0)$:

$$KC = \sqrt{(4-0)^2+(-8-4)^2+(0-3)^2} = \sqrt{16+144+9} = \sqrt{169} = 13.$$

La distance de C au centre est égale au rayon de la sphère.

> **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $KC = 13$, donc $C \in \mathcal{S}$.

Question 1.b

Sujet p. 6

> Avec les points A(0 ; 4 ; 16), B(0 ; 4 ; −10) et C(4 ; −8 ; 0), montrer que le triangle ABC est rectangle en C.

Calculons deux vecteurs issus de C :

$$\overrightarrow{CA} = A - C = (-4;12;16), \qquad \overrightarrow{CB} = B - C = (-4;12;-10).$$

Leur produit scalaire vaut

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = (-4)(-4) + 12\times 12 + 16(-10) = 16 + 144 - 160 = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont donc perpendiculaires. L'angle ACB est droit.

> **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le triangle ABC est rectangle en C.

Question 2.a

Sujet p. 6

> Montrer que le vecteur n⃗ = (3 ; 1 ; 0) est un vecteur normal au plan (ABC).

Deux vecteurs du plan (ABC) sont

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0;0;-26), \qquad \overrightarrow{AC} = C - A = (4;-12;-16).$$

Avec $\vec{n} = (3;1;0)$, on obtient

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 3\times 0 + 1\times 0 + 0\times(-26) = 0,$$

et

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 3\times 4 + 1\times(-12) + 0\times(-16) = 12 - 12 = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et engendrent le plan (ABC). Comme $\vec{n}$ leur est orthogonal, il est normal à ce plan.

RÉPONSE À RETENIR

$\vec{n} = (3; 1; 0)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Question 2.b

Sujet p. 6

Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

Un vecteur normal au plan est $(3; 1; 0)$, donc une équation cartésienne du plan est de la forme $3x + y + d = 0$. Le point $A(0; 4; 16)$ appartient au plan ; en remplaçant ses coordonnées, on trouve $3 \times 0 + 4 + d = 0$, donc $d = -4$.

RÉPONSE À RETENIR

Une équation cartésienne du plan (ABC) est $\boxed{3x + y - 4 = 0}$.

Question 3.a

Sujet p. 6

On admet que la sphère S coupe l'axe des abscisses en deux points, l'un ayant une abscisse positive et l'autre une abscisse négative. On note D celui qui a une abscisse positive. Montrer que le point D a pour coordonnées (12 ; 0 ; 0).

Un point de l'axe des abscisses a des coordonnées de la forme $(x; 0; 0)$. Pour qu'il appartienne à la sphère de centre $K(0; 4; 3)$ et de rayon 13, il faut que sa distance à K soit 13 :

$$x^2 + (0 - 4)^2 + (0 - 3)^2 = 13^2.$$

Ainsi $x^2 + 16 + 9 = 169$, donc $x^2 = 144$, d'où $x = 12$ ou $x = -12$. Le point D est celui dont l'abscisse est positive.

RÉPONSE À RETENIR

$\boxed{D(12; 0; 0)}$.

Question 3.b

Sujet p. 6

Donner une représentation paramétrique de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (ABC).

La droite perpendiculaire au plan (ABC) a pour vecteur directeur un vecteur normal à ce plan, par exemple $(3; 1; 0)$. Comme elle passe par $D(12; 0; 0)$, une représentation paramétrique s'obtient en ajoutant à D un multiple réel de ce vecteur.

RÉPONSE À RETENIR

Une représentation paramétrique de Δ est

$$\boxed{\begin{cases} x = 12 + 3t, \\ y = t, \\ z = 0, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.}$$

Question 3.c

Sujet p. 6

> Déterminer la distance du point D au plan (ABC).

Le plan a pour équation $3x + y - 4 = 0$. La distance du point $D(12; 0; 0)$ à ce plan se calcule avec la formule de distance d'un point à un plan $ax + by + cz + d = 0$:

$$d\big(D, (ABC)\big) = \frac{|3 \times 12 + 0 - 4|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{32}{\sqrt{10}} = \frac{16\sqrt{10}}{5}.$$

RÉPONSE À RETENIR

$$\boxed{d\big(D, (ABC)\big) = \frac{32}{\sqrt{10}} = \frac{16\sqrt{10}}{5} \approx 10{,}12.}$$

Question 4.

Sujet p. 6

> Calculer une valeur approchée, à l'unité de volume près, du volume du tétraèdre ABCD. On rappelle la formule du volume d'un tétraèdre : V = (1/3) × B × h, où B est l'aire d'une base et h la hauteur associée.

On choisit le triangle ABC comme base du tétraèdre. D'après la question 1.b, il est rectangle en C. Ses deux côtés perpendiculaires ont pour longueurs

$$AC = \sqrt{(-4)^2 + 12^2 + 16^2} = \sqrt{416} = 4\sqrt{26},$$
$$BC = \sqrt{(-4)^2 + 12^2 + (-10)^2} = \sqrt{260} = 2\sqrt{65}.$$

L'aire de la base est donc

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2} AC \times BC = \frac{1}{2}(4\sqrt{26})(2\sqrt{65}) = 52\sqrt{10}.$$

La hauteur correspondante est la distance de D au plan (ABC), soit $\frac{32}{\sqrt{10}}$. Ainsi,

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B}h = \frac{1}{3}(52\sqrt{10})\frac{32}{\sqrt{10}} = \frac{1664}{3} \approx 554{,}67.$$

Arrondie à l'unité de volume près, cette valeur est 555.

RÉPONSE À RETENIR

Le volume du tétraèdre $ABCD$, à l'unité de volume près, est $\boxed{555}$ unités de volume.

Exercice 4

5 points

Suites récurrentes et modèle d'évolution d'une population

PARTIE A

Question 1.

Sujet p. 7

> La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0{,}3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$. Cette relation s'écrit $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x(1 - x)$. Démontrer que f est strictement croissante sur [0 ; 1/2].

On dérive la fonction : $f'(x) = 2 - 4x = 2(1 - 2x)$. Ainsi, $f'(x) > 0$ pour $0 \leq x < \frac{1}{2}$, et $f'(\frac{1}{2}) = 0$.

Pour montrer que cela implique la stricte croissance sur tout l'intervalle fermé, prenons $x < y$ dans $[0; \frac{1}{2}]$. Le théorème des accroissements finis donne un réel $c \in]x; y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$. Comme $c < y \leq \frac{1}{2}$, on a $c < \frac{1}{2}$, donc $f'(c) > 0$. De plus, $y - x > 0$, d'où $f(y) - f(x) > 0$.

RÉPONSE À RETENIR

La fonction f est strictement croissante sur $[0; \frac{1}{2}]$.

Question 2.

Sujet p. 7

> On admet que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 1/2$. Calculer u_1, puis effectuer un raisonnement par récurrence pour démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$.

Calculons d'abord u_1 à l'aide de la relation de récurrence :

$u_1 = 2u_0(1 - u_0) = 2 \times 0{,}3 \times (1 - 0{,}3) = 0{,}42$.

Démontrons par récurrence que $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout entier naturel n.

Initialisation : $u_0 = 0{,}3 \leq 0{,}42 = u_1$. La propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité : supposons que $u_n \leq u_{n+1}$. Par l'encadrement admis dans l'énoncé, u_n et u_{n+1} appartiennent à $[0; \frac{1}{2}]$. Comme f est croissante sur cet intervalle, $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$. Or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$, donc $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. La propriété est héréditaire.

La propriété étant vraie au rang 0 et héréditaire, elle est vraie pour tout entier naturel n.

RÉPONSE À RETENIR

$u_1 = 0{,}42$ et, pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$.

Question 3.

Sujet p. 7

> En déduire que la suite (u_n) est convergente.

D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante. L'énoncé admet aussi que $u_n \leq \frac{1}{2}$ pour tout entier naturel n : la suite est donc majorée par $\frac{1}{2}$. Le théorème de convergence des suites monotones établit qu'une suite croissante et majorée converge.

RÉPONSE À RETENIR

La suite (u_n), croissante et majorée par $\frac{1}{2}$, est convergente.

Question 4.

Sujet p. 7

> Justifier que la limite de la suite (uₙ) est égale à 1/2.

Notons ℓ la limite de la suite, qui existe d'après la question précédente. La fonction f est continue et $u_{n+1} = f(u_n)$. En passant à la limite dans cette relation, on obtient $\ell = f(\ell) = 2\ell(1-\ell)$. Ainsi, $\ell(1-2\ell) = 0$, donc $\ell = 0$ ou $\ell = \frac{1}{2}$.

La suite est croissante et son premier terme vaut $u_0 = 0{,}3$, donc sa limite vérifie $\ell \geq 0{,}3$. Elle ne peut pas être égale à 0 : il reste $\ell = \frac{1}{2}$.

RÉPONSE À RETENIR

La limite de la suite (u_n) est $\boxed{\frac{1}{2}}$.

PARTIE B

Question 1.a

Sujet p. 7

> Dans cette question, b = 0. Justifier que la suite (Pₙ) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

Pour $b = 0$, la relation du modèle devient $P_{n+1} - P_n = P_n$, donc $P_{n+1} = 2P_n$. Chaque terme est ainsi obtenu en multipliant le précédent par 2. La suite est géométrique de premier terme $P_0 = 3$ et de raison 2 ; en particulier, $P_n = 3 \times 2^n$.

RÉPONSE À RETENIR

(P_n) est une suite géométrique de premier terme $P_0 = 3$ et de raison 2.

Question 1.b

Sujet p. 7

> Dans cette question, b = 0. Déterminer la limite de Pₙ.

Pour $b = 0$, on a $P_n = 3 \times 2^n$. Comme 2^n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, il en est de même pour P_n .

RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = +\infty$.

Question 2.a

Sujet p. 7

> Dans cette question, b = 0,2. Pour tout entier naturel n, on pose vₙ = 0,1 × Pₙ. Calculer v₀, puis montrer que, pour tout entier naturel n, vₙ₊₁ = 2vₙ(1 − vₙ).

On sait que $P_0 = 3$ et que $v_n = 0{,}1P_n$. Ainsi, $v_0 = 0{,}1 \times 3 = 0{,}3$.

Pour $b = 0{,}2$, la relation du modèle donne $P_{n+1} - P_n = P_n(1 - 0{,}2P_n)$, soit $P_{n+1} = 2P_n - 0{,}2P_n^2$. Par conséquent,

$v_{n+1} = 0{,}1P_{n+1} = 0{,}2P_n - 0{,}02P_n^2 = 2v_n - 2v_n^2 = 2v_n(1 - v_n)$,

où l'on a utilisé $v_n = 0{,}1P_n$.

RÉPONSE À RETENIR

$v_0 = 0{,}3$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n(1 - v_n)$.

Question 2.b

Sujet p. 7

Dans ce modèle, justifier que la population se stabilisera autour d'une valeur que l'on précisera.

La suite (v_n) a le même premier terme que (u_n), soit $0{,}3$, et vérifie la même relation de récurrence. Par récurrence, les deux suites ont donc les mêmes termes : $v_n = u_n$ pour tout n. D'après la partie A, v_n tend vers $\frac{1}{2}$. Comme $v_n = 0{,}1P_n$, on a $P_n = 10v_n$, donc P_n tend vers $10 \times \frac{1}{2} = 5$. L'effectif P_n étant exprimé en milliers d'individus, cette limite correspond à 5 000 individus.

RÉPONSE À RETENIR

Dans ce modèle, la population se stabilisera autour de 5 milliers d'individus, soit 5 000 individus.

Sujet : https://www.sujetdebac.fr/annales-pdf/2023/spe-mathematiques-2023-amerique-sud-1-sujet-officiel.pdf
© FormaV EI • Proposition de correction, distincte d'un corrigé officiel.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.