Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + HGGSP, veuillez visiter :
bac-maths-hggsp.fr/annales-sujets-et-corriges

∽ Corrigé du baccalauréat Polynésie 30 août 2022 ∾
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ sujet n° 1

EXERCICE 1 7 points **probabilités**

Parmi les angines, un quart nécessite la prise d'antibiotiques, les autres non.

Afin d'éviter de prescrire inutilement des antibiotiques, les médecins disposent d'un test de diagnostic ayant les caractéristiques suivantes :

- lorsque l'angine nécessite la prise d'antibiotiques, le test est positif dans 90 % des cas ;
- lorsque l'angine ne nécessite pas la prise d'antibiotiques, le test est négatif dans 95 % des cas.

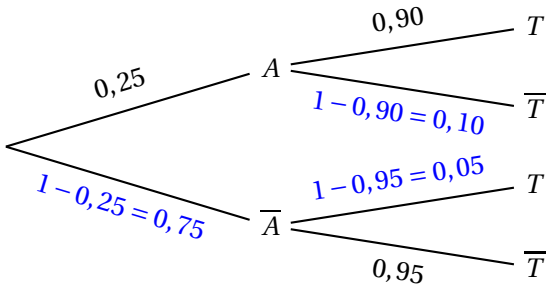
Partie 1

Un patient atteint d'angine et ayant subi le test est choisi au hasard.

On considère les évènements suivants :

- A : « le patient est atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques » ;
- T : « le test est positif » ;
- $\overline{A}$ et $\overline{T}$ sont respectivement les évènements contraires de A et T.

1. On résume la situation par un arbre pondéré.



$P(A \cap T) = P(A) \times P_A(T) = 0,25 \times 0,90 = 0,225$

2. D'après la formule des probabilités totales :

$P(T) = P(A \cap T) + P\left(\overline{A} \cap T\right) = 0,225 + 0,75 \times 0,05 = 0,262\,5$

3. On choisit un patient ayant un test positif. La probabilité qu'il soit atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques est :

$P_T(A) = \dfrac{P(A \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,225}{0,262\,5} \approx 0,857\,1$

4. **a.** Les évènements correspondant à un résultat erroné du test sont : $\overline{A} \cap T$ et $A \cap \overline{T}$.

b. On définit l'évènement E : « le test fournit un résultat erroné ».

$P(E) = P\left(\overline{A} \cap T\right) + P\left(A \cap \overline{T}\right) = 0,25 \times 0,10 + 0,75 \times 0,05 = 0,062\,5$

Partie 2

On sélectionne au hasard un échantillon de n patients qui ont été testés. On admet que l'on peut assimiler ce choix d'échantillon à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de patients de cet échantillon ayant un test erroné.

1. On suppose que $n = 50$.

a. On a une répétition de 50 épreuves indépendantes et identiques n'ayant que deux issues et dont le succès a pour probabilité $p = 0{,}062\,5$; donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}062\,5$.

b. $P(X = 7) = \binom{50}{7} \times 0{,}062\,5^7 \times (1 - 0{,}062\,5)^{50-7} \approx 0{,}023\,7$

c. La probabilité qu'il y ait au moins un patient dans l'échantillon dont le test est erroné est :

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{50}{0} \times 0{,}062\,5^0 \times (1 - 0{,}062\,5)^{50} \approx 0{,}960\,3$$

2. On cherche la taille de l'échantillon faut-il choisir pour que $P(X \geqslant 10)$ soit supérieure à $0,95$.

$P(X \geqslant 10) > 0,95 \iff P(X < 10) \leqslant 0,05 \iff P(X \leqslant 9) \leqslant 0,05$

À la calculatrice, par essais successifs, on trouve :

- pour $n = 247$, $P(X \leqslant 9) \approx 0{,}051\,4$;
- pour $n = 248$, $P(X \leqslant 9) \approx 0{,}049\,8$.

Il faut donc un échantillon de taille au moins 248 pour que $P(X \geqslant 10) \geqslant 0,95$.

EXERCICE 2 7 points **suites, fonctions**

Soit k un nombre réel.

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = k u_n (1 - u_n).$$

Partie 1

Dans cette partie, $k = 1,9$ et $u_0 = 0,1$; on a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,9 u_n (1 - u_n)$.

1. On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = 1,9x(1 - x)$.

a. On étudie les variations de f sur l'intervalle $[0; 1]$.

$f'(x) = 1,9(1 - x) + 1,9x \times (-1) = 1,9 - 1,9x - 1,9x = 1,9(1 - 2x)$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x) = 1,9(1-2x)$		$+$	0	$-$	

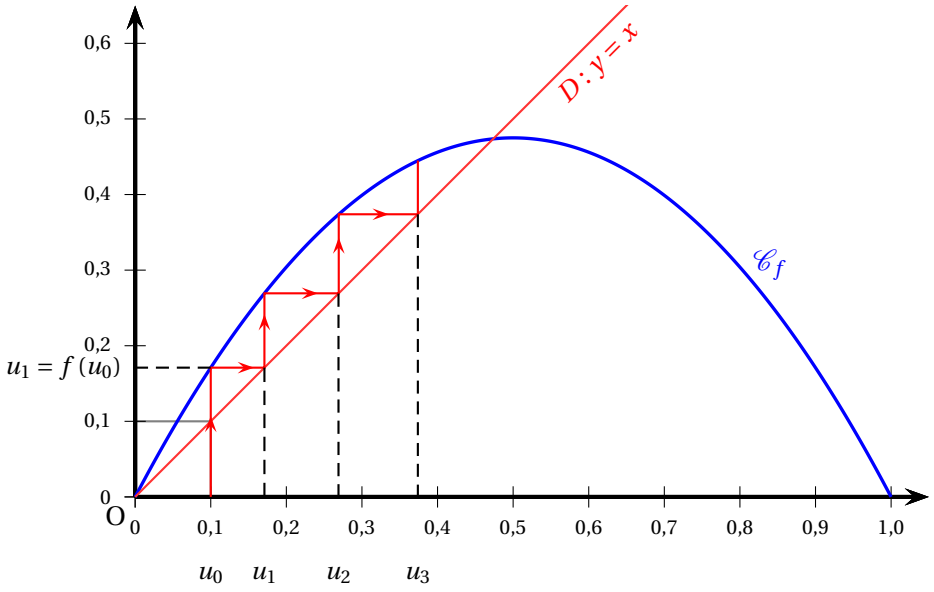
$f(0) = 0$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0,475$ et $f(1) = 0$

On établit le tableau des variations de f sur $[0\,;1]$:

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$0,475$	↘	0

b. On peut en déduire que si $x \in [0\,;\,1]$ alors $f(x) \in [0\,;\,0,475]$ donc $f(x) \in [0\,;\,1]$.

2. Ci-dessous sont représentés les premiers termes de la suite (u_n) construits à partir de la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et de la droite D d'équation $y = x$.



La suite (u_n) semble croissante et semble converger vers l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et D.

3. **a.** Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

- **Initialisation**

  Pour $n = 0$, $u_n = u_0 = 0,1$ et $u_{n+1} = 1,9u_0(1-u_0) = 1,9 \times 0,1 \times 0,9 = 0,171$; donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \frac{1}{2}$.

  La propriété est vraie au rang 0.

- **Hérédité**

  On suppose la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$. C'est l'hypothèse de récurrence.

  La fonction f est croissante sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ donc $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$.

  $f(0) = 0$, $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0,475 \leqslant \frac{1}{2}$

  On en déduit que : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \frac{1}{2}$.

  Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire ; donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

b. De la propriété précédente, on tire :

- pour tout n, $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante ;
- pour tout n, $u_n \leqslant \frac{1}{2}$ donc la suite (u_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.

La suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, elle est convergente.

c. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n).

Comme pour tout$n$, $f(u_n) = u_{n+1}$ et que la fonction f est continue, la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

On résout l'équation $f(x) = x$:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 1,9x(1-x) = x \iff 1,9x(1-x) - x = 0 \\ &\iff x(1,9-1,9x-1) = 0 \iff x(0,9-1,9x) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } 0,9-1,9x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{0,9}{1,9} \end{aligned}$$

La suite (u_n) est croissante donc $\ell \geqslant u_0$ soit $\ell \geqslant 0,1$.

La seule solution possible est donc $\ell = \frac{0,9}{1,9} = \frac{9}{19} \approx 0,474$.

Partie 2

Dans cette partie, $k = \frac{1}{2}$ et $u_0 = \frac{1}{4}$, donc, pour tout n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1-u_n)$.

On admet que pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1. $0 < \dfrac{1}{2} < 1$ donc la suite géométrique (v_n) définie pour tout n par $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ est convergente vers 0.

Pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) est convergente et a pour limite 0.

2. On considère la fonction Python `algo(p)` où `p` désigne un entier naturel non nul :

```
def algo(p) :
  u =1/4
  n = 0
  while u > 10**(-p):
      u = 1/2*u*(1 - u)
      n = n+1
  return(n)
```

La boucle s'arrête quand `u` est inférieur ou égal à `10**(-p)`, c'est-à-dire pour la première valeur de n vérifiant $u_n \leqslant 10^{-p}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, il y a une première valeur n_0 à partir de laquelle $u_n \leqslant 10^{-p}$ pour tout $n \geqslant n_0$. La boucle `while` ne tourne donc pas indéfiniment, ce qui permet à la commande `algo(p)` de renvoyer une valeur.

EXERCICE 3 7 points **fonctions**

Partie 1

Soit g la fonction définie pour tout réel $x \in]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$.

1. On note g' la dérivée de g. On a : $g'(x) = \dfrac{2\dfrac{1}{x} \times x - 2\ln x \times 1}{x^2} = \dfrac{2 - 2\ln x}{x^2}$

2. On dispose de ce tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$:

x	0		1		e		$+\infty$
Variations de g	‖	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{2}{\mathrm{e}}$	↘ 0

a. La valeur $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$ est l'image de e par f : $f(\mathrm{e}) = \dfrac{2\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}} = \dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

b. $g'(x) = \dfrac{2 - 2\ln x}{x^2}$ donc $g'(x)$ est du signe de $2 - 2\ln x = 2(1 - \ln x)$.

- Sur $]0\,;\,\mathrm{e}[$, $\ln x < 1$ donc $1 - \ln x > 0$ donc $g'(x) > 0$; la fonction g est strictement croissante sur cet intervalle.
- Sur $]\,\mathrm{e}\,;+\infty[$, $\ln x > 1$ donc $1 - \ln x < 0$ donc $g'(x) < 0$; la fonction g est strictement décroissante sur cet intervalle.

c. On justifie les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} 2\ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

  Donc, par produit de limites, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} 2\ln x \times \dfrac{1}{x} = -\infty$.
- D'après le cours, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

3. On en déduit le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
signe de $g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0

Partie 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = [\ln(x)]^2$.

Dans cette partie, chaque étude est effectuée sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

1. $[(u(x)^2]' = 2u'(x)u(x)$ donc $f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x = \dfrac{2\ln x}{x} = g(x)$

Donc sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la fonction f est une primitive de la fonction g.

2. **a.** On étudie la convexité de la fonction f.
D'après les questions précédentes, la fonction g, dérivée de la fonction f, est croissante sur $]0\,;\,\mathrm{e}\,[$, donc la fonction f est convexe sur cet intervalle.
De même, la fonction g, dérivée de la fonction f, est décroissante sur $]\,\mathrm{e}\,;+\infty[$, donc la fonction f est concave sur cet intervalle.
De plus, la fonction g donc la fonction f', change de sens de variation en $x=\mathrm{e}$, donc la courbe représentant la fonction f admet un point d'inflexion en $x=\mathrm{e}$.

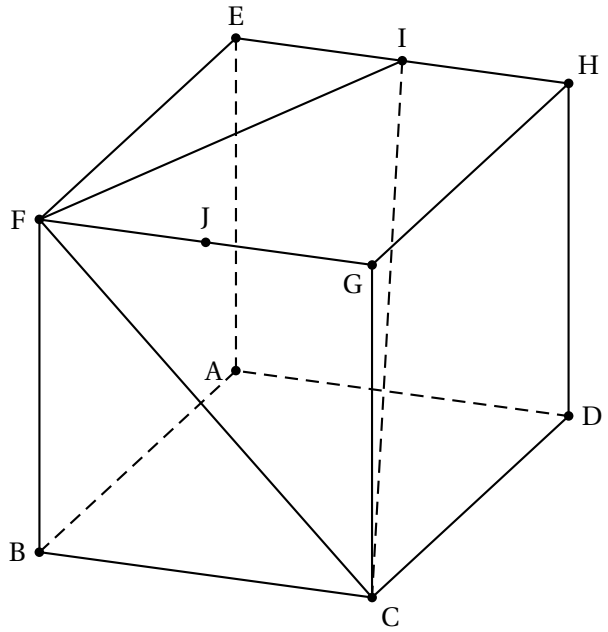
b. On étudie les variations de la fonction f en utilisant le signe de $f'=g$.
Sur l'intervalle $]0\,;1[$, la fonction g est négative donc f' est négative; la fonction f est donc strictement décroissante sur cet intervalle.
Sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$, la fonction g est positive donc f' est positive; la fonction f est donc strictement croissante sur cet intervalle.
De plus on peut dire que la fonction f admet un minimum pour $x=1$.

3. **a.** Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse e est : $y=f'(\mathrm{e})(x-\mathrm{e})+f(\mathrm{e})$. On a : $f'(\mathrm{e})=g(\mathrm{e})=\dfrac{2}{\mathrm{e}}$; $f(\mathrm{e})=(\ln \mathrm{e})^2=1$
L'équation devient : $y=\dfrac{2}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e})+1$ soit $y=\dfrac{2}{\mathrm{e}}x-2+1$ c'est-à-dire $y=\dfrac{2}{\mathrm{e}}x-1$.

b. La courbe représentant f admet un point d'inflexion en $x=\mathrm{e}$ donc la tangente en ce point coupe la courbe; à gauche du point, la fonction est convexe donc la courbe est au dessus de cette tangente.
On en déduit que sur $]0\,;\ \mathrm{e}\,]$, on a : $[\ln(x)]^2 \geqslant \dfrac{2}{\mathrm{e}}x-1$.

EXERCICE 4 **7 points** **géométrie dans le plan et dans l'espace**

On considère le cube ABCDEFGH. On note I le milieu du segment[EH] et on considère le triangle CFI. L'espace est muni du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}},\,\overrightarrow{\mathrm{AD}},\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$ et on admet que le point I a pour coordonnées $\left(0\,;\,\dfrac{1}{2};\,1\right)$ dans ce repère.



1. **a.** Les coordonnées des points C, F et G sont : C $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, F $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et G $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

b. Soit le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

- $\overrightarrow{\text{CF}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$; $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{CF}} = 1\times 0+2\times(-1)+2\times 1 = 0$ donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{\text{CF}}$
- $\overrightarrow{\text{CI}}\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$; $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\text{CI}} = 1\times(-1)+2\times(-\frac{1}{2})+2\times 1 = 0$ donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{\text{CI}}$
- Les points C, F et I ne sont pas alignés donc ces trois points forment le plan (CFI) dont $\overrightarrow{\text{CF}}$ et $\overrightarrow{\text{CI}}$ sont deux vecteurs directeurs.

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (CFI) donc il est normal au plan (CFI).

c. D'après la question précédente, le plan (CFI) a une équation de la forme $x+2y+2z+d=0$ où $d\in\mathbb{R}$.
C $\in$ (CFI) donc $x_\text{C}+2y_\text{C}+2z_\text{C}+d=0$ soit $1+2\times 1+2\times 0+d=0$ donc $d=-3$.
Une équation cartésienne du plan (CFI) est donc : $x+2y+2z-3=0$.

2. On note d la droite passant par G et orthogonale au plan (CFI).

a. La droite d est orthogonale au plan (CFI) ; elle a donc le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur directeur. De plus elle passe par le point G. C'est donc l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ tels que $\overrightarrow{\text{GM}}$ et $\vec{n}$ soient colinéaires, c'est-à-dire tels que $\overrightarrow{\text{GM}} = t.\vec{n}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

$$\overrightarrow{\text{GM}} = t.\vec{n} \iff \begin{cases} x-1 &= t\\ y-1 &= 2t\\ z-1 &= 2t\end{cases}$$

La droite d a donc pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x &= 1+t\\ y &= 1+2t\\ z &= 1+2t\end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

b. La droite d est orthogonale au plan (CFI) donc le projeté orthogonal K du point G de la droite d sur le plan (CFI), est le point d'intersection de d et de (CFI) ; donc ses coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifient le système : $\begin{cases} x &= 1+t\\ y &= 1+2t\\ z &= 1+2t\\ x+2y+2z-3 &= 0\end{cases}$

On a donc : $(1+t)+2(1+2t)+2(1+2t)-3=0$, ce qui donne :
$1+t+2+4t+2+4t-3=0$ soit $9t=-2$ donc $t=-\frac{2}{9}$.

$$\begin{cases} x = 1+t = 1-\frac{2}{9} = \frac{7}{9}\\ y = 1+2t = 1-2\times\frac{2}{9} = \frac{5}{9}\\ z = 1+2t = 1-2\times\frac{2}{9} = \frac{5}{9}\end{cases}$$

Donc le projeté orthogonal K du point G sur le plan (CFI) a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9};\frac{5}{9};\frac{5}{9}\right)$.

c. La distance du point G au plan (CFI) est :

$$\text{GK} = \sqrt{(x_\text{K}-x_\text{G})^2+(y_\text{K}-y_\text{G})^2+(z_\text{K}-z_\text{G})^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{9}-1\right)^2+\left(\frac{5}{9}-1\right)^2+\left(\frac{5}{9}-1\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(-\frac{2}{9}\right)^2+\left(-\frac{4}{9}\right)^2+\left(-\frac{4}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{81}+\frac{16}{81}+\frac{16}{81}} = \sqrt{\frac{36}{81}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

3. On considère la pyramide GCFI.

a. Si on considère que I est le sommet de la pyramide, la base en est le triangle GFC rectangle en G.

Le projeté orthogonal de I sur le plan (GFC) est le point J, milieu de [FG], et IJ = 1 donc la hauteur h vaut 1.

Le triangle GFC a pour aire $\frac{\text{GF}\times\text{GC}}{2} = \frac{1}{2}$.

La pyramide GCFI a donc pour volume, en unité de volume : $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{6}$.

b. Appelons $\mathscr{A}$ l'aire du triangle CFI.

Si on considère que G est le sommet de la pyramide, la base en est le triangle CFI d'aire $\mathscr{A}$.

Le projeté orthogonal de G sur le plan (CFI) est le point K, donc la hauteur h vaut GK soit $\frac{2}{3}$.

La pyramide GCFI a donc pour volume : $\frac{1}{3}\times\mathscr{A}\times\frac{2}{3} = \frac{2\mathscr{A}}{9}$.

Or le volume de la pyramide vaut $\frac{1}{6}$, donc $\frac{2\mathscr{A}}{9} = \frac{1}{6}$ donc $\mathscr{A} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

L'aire du triangle CFI est, en unité d'aire, égale à $\frac{3}{4}$.

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.