Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du Bac Général Maths + HGGSP, veuillez visiter :
bac-maths-hggsp.fr/annales-sujets-et-corriges

∽ Corrigé du baccalauréat Asie 17 mai 2022 Jour 1 ∾

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices.**

Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20 points).

Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

EXERCICE 1 **7 points**

Principaux domaines abordés : Manipulation des vecteurs, des droites et des plans de l'espace. Orthogonalité et distances dans l'espace. Représentations paramétriques et équations cartésiennes.

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ de l'espace, on considère les points

$$A(-3\,;\,1\,;\,3), B(2\,;\,2\,;\,3), C(1\,;\,7\,;\,-1), D(-4\,;\,6\,;\,-1) \text{ et } K(-3\,;\,14\,;\,14).$$

1. **a.** On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\5\\-4\end{pmatrix}$.

b. D'après la question précédente, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme.
De plus le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 5\times(-1)+1\times5+0\times(-4) = 0$.
Le parallélogramme ABCD ayant deux côtés consécutifs perpendiculaires est un rectangle.

c. On a $AB^2 = 25+1 = 26$, d'où $AB = \sqrt{26}$;
de même $AD^2 = 1+25+16 = 42$, d'où $AD = \sqrt{42}$.
L'aire du rectangle ABCD est égale à
$AB\times AD = \sqrt{26}\times\sqrt{42} = \sqrt{26\times42} = \sqrt{2\times13\times2\times21} = 2\sqrt{13\times21} = 2\sqrt{273}$.

2. **a.** D'après la question 1., les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et D ne sont pas alignés : ils définissent donc bien un plan.

b. Soit le vecteur $\vec{n}(-2\,;\,10\,;\,13)$.
$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = -10+10+0 = 0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD} = 2+50-52 = 0$.
Conclusion : le vecteur $\vec{n}$, orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABD), est normal à ce plan.

c. Le résultat précédent montre que le plan (ABD) a une équation de la forme $-2x+10y+13z = d$, avec $d\in\mathbb{R}$.
Or par exemple $B(2\,;\,2\,;\,3)\in$ (ABD) donc
$-2\times2+10\times2+13\times3 = d \iff -4+20+39 = d \iff d = 55$.
Donc le plan (ABD) a pour équation $-2x+10y+13z = 55$.

3. **a.** Si Δ est orthogonale au plan (ABD) elle a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{n}$.
Comme elle contient K, on a donc :
$M(x\,;\,y\,;\,z)\in\Delta \iff \overrightarrow{KM} = t\vec{n},\quad t\in\mathbb{R}$.

Avec $\overrightarrow{\text{K}M}\begin{pmatrix} x-(-3) \\ y-14 \\ z-14 \end{pmatrix}$ ceci se traduit par le système :

$$\begin{cases} x+3 &= -2t \\ y-14 &= 10t \\ z-14 &= 13t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x &= -2t-3 \\ y &= 10t+14 \\ z &= 13t+14 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

b. Si I est le projeté orthogonal de K sur le plan (ABD), le point I est un point de Δ ; comme c'est aussi un point de (ABD) ; ses coordonnées vérifient le système

$$\begin{cases} x &= -2t-3 \\ y &= 10t+14 \\ z &= 13t+14 \\ -2x+10y+13z &= 55 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant dans la dernière équation x, y et z par leurs expressions en fonction de t, on obtient :

$-2(-2t-3)+10(10t+14)+13(13t+14)=55$

$\iff 4t+6+100t+140+169t+182=55 \iff 273t=-273 \iff t=-1.$

Les premières équations donnent alors

$x=2-3=-1$, $y=-10+14=4$ et $z=-13+14=1$.

Le point I a donc pour coordonnées $(-1\ ;\ 4\ ;\ 1)$.

c. ABCD étant un rectangle le point D appartient au plan (ABD). Donc la hauteur de la pyramide KABCD de base ABCD est [KI].

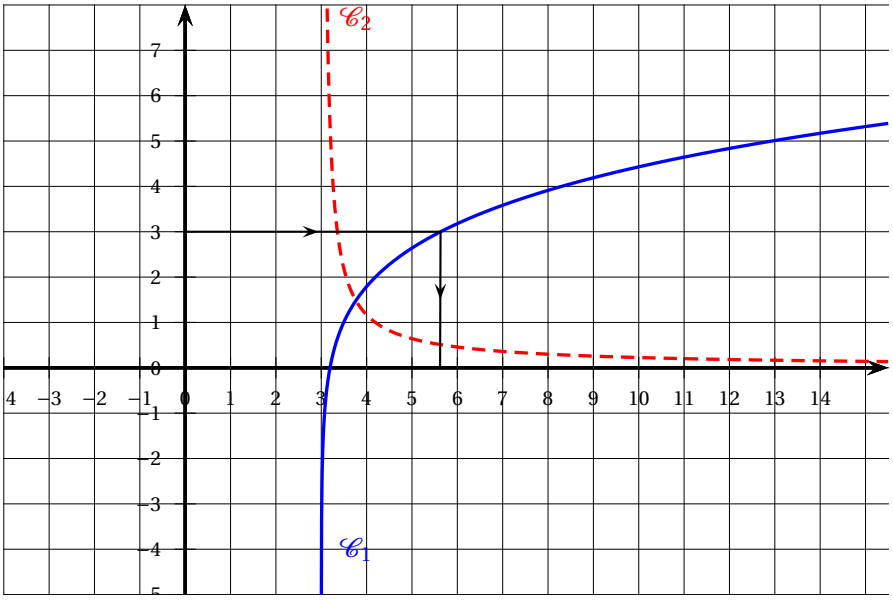
$\overrightarrow{\text{KI}}\begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ -13 \end{pmatrix}$ donne $\text{KI}^2=4+100+169=273$ et enfin $\text{KI}=\sqrt{273}$.

4. On a $V=\dfrac{1}{3}\times \mathscr{A}(\text{ABCD})\times \text{KI}=\dfrac{1}{3}\times 2\sqrt{273}\times\sqrt{273}=\dfrac{2\times 273}{3}=\dfrac{2\times 3\times 91}{3}=182.$

EXERCICE 2 **7 points**

Principaux domaines abordés : Étude des fonctions. Fonction logarithme.

Partie A



Dans le repère orthonormé ci-dessus, sont tracées les courbes représentatives d'une fonction f et de sa fonction dérivée, notée f', toutes deux définies sur $]3\,;\,+\infty[$.

1. Si $\mathscr{C}_1$ était la représentation de la dérivée, celle-ci serait négative puis positive , donc la fonction serait décroissante puis croissante ce qui n'est pas le cas de la fonction représente par la courbe $\mathscr{C}_2$.
   Donc $\mathscr{C}_2$ est la représentation de la fonction dérivée et $\mathscr{C}_1$ celle de la fonction.
2. On lit approximativement $f(5{,}6) \approx 3$.
3. f semble concave sur $]3\,;\,+\infty[$.

Partie B

1. • $x^2-x-6 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\right) = (x+2)(x-3)$.
   On sait que ce trinôme est positif sauf sur l'intervalle $[-2\,;\,3]$. Donc $\ln\left(x^2-x-6\right)$ est bien définie sur $I =]3\,;\,+\infty[$;
   • On peut calculer $\Delta = 1+24 = 25 = 5^2$ et en déduire les racines du trinôme x^2-x-6 : $x_1 = \dfrac{1+5}{2} = 3$ et $x_2 = \dfrac{1-5}{2} = -2$ et faire ensuite la même conclusion.
2. On admet que la fonction f de la Partie A est définie par $f(x) = \ln\left(x^2-x-6\right)$ sur I.
   • Limite en $+\infty$: $\ln\left(x^2-x-6\right) = \ln x^2\left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{6}{x^2}\right)$.
   On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{x^2} = 0$, donc

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{6}{x^2}=1$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$, par composition de la fonction logarithme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

- Limite en 3 : $f(x)=\ln(x+2)(x-3)$.

On a $\lim\limits_{x\to+3}(x+2)(x-3)=5\times 0=0$, donc $\lim\limits_{x\to+3}\ln(x+2)(x-3)=-\infty$. Ceci signifie que la droite verticale d'équation $x=3$ est asymptote à courbe représentative de la fonction f sur I (soit $\mathscr{C}_1$)

3. **a.** Sur I, on a vu que $x^2-x-6>0$, donc la fonction f est dérivable et sur I, on a $f'(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x-6}$.

b. $f'(x)$ a le signe du numérateur $2x-1$:

pour $x>3$, on a $2x-1>5$ donc $2x-1>0$ et donc $f'(x>0$.

Donc la fonction f est strictement croissante sur I de moins l'infini à plus l'infini.

On dresse le tableau des variations de la fonction f.

x	3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

4. **a.** La fonction f est strictement croissante sur I et en particulier sur $]5;6[$.

De plus $f(5)=\ln(25-5-6)=\ln 14\approx 2{,}64<3$ et $f(6)=\ln(36-6-6)=\ln 24\approx 3{,}18>3$.

La fonction f étant continue car dérivable sur l'intervalle $]5;6[$, d'après la propriété des valeurs intermédiaires il existe un réel unique α tel que $f(\alpha)=3$, avec $5<\alpha<6$.

b. La calculatrice donne :

$f(5{,}6)\approx 2{,}984$ et $f(5{,}7)\approx 3{,}035$, donc $5{,}6<\alpha<5{,}7$ puis

$f(5{,}63)\approx 2{,}999$ et $f(5{,}64)\approx 3{,}004$ donc $5{,}63<\alpha<5{,}64$.

5. **a.** La fonction f' quotient de fonctions dérivables sur I, le dénominateur ne s'annulant pas est elle-même dérivable sur I et sur cet intervalle :

$$f''(x)=\frac{2\left(x^2-x-6\right)-(2x-1)(2x-1)}{\left(x^2-x-6\right)^2}=\frac{2x^2-2x-12-4x^2-1-4x}{\left(x^2-x-6\right)^2}=\frac{-2x^2+2x-13}{\left(x^2-x-6\right)^2}.$$

b. Le signe de la dérivée seconde est celui du numérateur puisque $\left(x^2-x-6\right)^2>0$.

Or ce trinôme $-2x^2+2x-13$ n'a pas de racine ($\Delta=4-8\times 13=-100<0$), donc est négatif en particulier sur I.

Sur I, $f''(x)<0$: la fonction est concave sur cet intervalle.

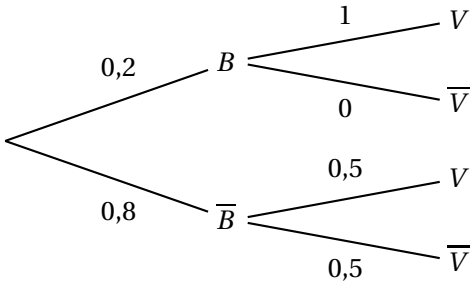
EXERCICE 3 **7 points**

Principaux domaines abordés : Probabilités conditionnelles et indépendance. Variables aléatoires.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie 1

1. S'il a pris le bus il est à l'heure pour son vol, donc $P_B(V) = 1$.
2. On représente la situation par un arbre pondéré.



3. D'après la loi des probabilités totales :
$P(V) = P(B \cap V) + P\left(\overline{B} \cap V\right) = 0{,}2 \times 1 + 0{,}8 \times 0{,}5 = 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}6$.
4. On calcule $P_V(B) = \dfrac{P(V \cap B)}{P(V)} = \dfrac{P(B \cap V)}{P(V)} = \dfrac{0{,}2}{0{,}6} = \dfrac{1}{3}$.

Partie 2

1. La présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres et chaque passager a la même probabilité 0,95 d'être présent, donc la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 206$ et $p = 0{,}95$.
2. On a $\text{E} = n \times p = 206 \times 0{,}95 = 195{,}7 \approx 196$.
En moyenne sur 206 titulaires d'un billet à peu près 196 vont se présenter.
3. On a $P(X = 201) = \binom{206}{201} \times 0{,}95^{201} \times 0{,}05^5 \approx 0{,}030\,63$, soit 0,031 au millième près.
4. La calculatrice donne $P(X \leqslant 200) \approx 0{,}947\,7$, soit 0,948 au millième près.
Il est donc à peu près certain que l'avion sera au mieux juste rempli.
5. On admet que Y suit la loi de probabilité donnée par le tableau suivant :

y_i	0	1	2	3	4	5	6
$P\left(Y = y_i\right)$	0,947 75	0,030 63	0,014 41	0,005 39	0,001 51	0,000 28	0,000 03
c_i	51 500	50 650	49 800	48 950	48 100	47 250	46 400

   a. En complétant à 1 la somme des probabilités données dans le tableau on trouve :
$P(Y = 6) = 1 - \left(P(Y = 0) + P(Y = 1) + \cdots + P(Y = 5)\right) = 0{,}000\,03$.
   b. La compagnie a encaissé $206 \times 250 = 51\,500$ € et elle devra rembourser 850 € à chaque client ne pouvant embarquer, donc $C = 51\,500 - 850\,Y$

c. Voir le tableau ci-dessus.
On a $\mathrm{E}(C) = 51\,500 \times 0{,}947\,75 + \ldots 46\,400 \times 0{,}000\,03 \approx 51\,429{,}2$, soit 51 429 € à l'euro près

d. En vendant exactement 200 billets, la compagnie fera un chiffre d'affaires de 200×250 soit 50 000 euros.
En pratiquant le surbooking, la compagnie peut espérer un chiffre d'affaires de 51 429 euros.

EXERCICE 4 **7 points**

Principaux domaines abordés : Suites numériques. Algorithmique et programmation.

Dans cet exercice, on modélise le développement d'une bactérie avec les hypothèses suivantes : cette bactérie a une probabilité 0,3 de mourir sans descendance et une probabilité 0,7 de se diviser en deux bactéries filles. Pour tout entier naturel n, on appelle p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie.
On admet que, d'après ce modèle, la suite (p_n) est définie de la façon suivante :
$p_0 = 0{,}3$ et, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0{,}3 + 0{,}7p_n^2$.

1. La feuille de calcul ci-dessous donne des valeurs approchées de la suite (p_n)

a.
- $p_1 = 0{,}3 + 0{,}7 \times 0{,}3^2 = 0{,}3 + 0{,}7 \times 0{,}09 = 0{,}3 + 0{,}063 = 0{,}363$;
- $p_2 = 0{,}3 + 0{,}7 \times 0{,}363^2 = 0{,}3 + 0{,}7 \times 0{,}131\,769 = 0{,}3 + 0{,}092\,238\,3 = 0{,}392\,238\,3$.

b. La probabilité d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type est égale à $1 - p_{10} \approx 1 - 0{,}428\,020\,18 \approx 0{,}571\,980 \approx 0{,}572$ au millième près.

c. D'après le tableau la suite (p_n) semble être croissante et semble aussi avoir une limite puisque les quatre derniers résultats commencent par 0,428 5...

2. **a.** On veut démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0{,}5$.
Initialisation : On a $0 \leqslant 0{,}3 \leqslant 0{,}363 \leqslant 0{,}5$, soit $0 \leqslant p_0 \leqslant p_1 \leqslant 0{,}5$: la relation est vraie au rang 0.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0{,}5$.
Si ces nombres positifs sont rangés dans dans cet ordre, leurs carrés aussi, soit
$0 \leqslant p_n^2 \leqslant p_{n+1}^2 \leqslant 0{,}5^2$, puis en multipliant par 0,7 :
$0 \leqslant 0{,}7 \times p_n^2 \leqslant 0{,}7 \times p_{n+1}^2 \leqslant 0{,}7 \times 0{,}5^2$ et enfin en ajoutant à chaque membre 0,3 :
$0{,}3 \leqslant 0{,}3 + 0{,}7 \times p_n^2 \leqslant 0{,}3 + 0{,}7 \times p_{n+1}^2 \leqslant 0{,}3 + 0{,}7 \times 0{,}5^2$, soit
$0{,}3 \leqslant p_{n+1} \leqslant p_{n+2} \leqslant 0{,}475$. On peut donc écrire :
$0 \leqslant p_{n+1} \leqslant p_{n+2} \leqslant 0{,}5$: la relation est vraie au rang $n+1$.
Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est encore vraie au rang $n+1$: d'après la principe de récurrence, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0{,}5$

b. Le résultat précédent montre que la suite (p_n) est croissante et majorée par 0,5 : elle est donc convergente vers une limite L telle que $L \leqslant 0{,}5$.

3. **a.** Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} p_{n+1} = L$, la relation de récurrence donne :

$$L = 0{,}3 + 0{,}7L^2 \iff 0{,}7L^2 - L + 0{,}3 = 0$$

L est solution de l'équation $0{,}7x^2 - x + 0{,}3 = 0$.

b. On a $\Delta = 1 - 4 \times 0{,}7 \times 0{,}3 = 1 - 0{,}84 = 0{,}16 = 0{,}4^2 > 0$. Il y a donc deux solutions :

$$L_1 = \frac{1+0{,}4}{2\times 0{,}7} = 1, \quad \text{et} \quad L_2 = \frac{1-0{,}4}{2\times 0{,}7} = \frac{0{,}6}{1{,}4} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \approx 0{,}43$$

On ne peut retenir la solution L_1 puisque (p_n) est majorée par 0,5. Il reste donc L_2 : $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{3}{7}$.

4. La fonction suivante, écrite en langage Python, a pour objectif de renvoyer les n premiers termes de la suite (p_n).

On complète, les lignes 2, 4 et 5 de cette fonction de façon à ce que la fonction `suite(n)` retourne, sous forme de liste, les n premiers termes de la suite.

```
1  def suite(n) :
2    p = 0.3
3    s = [p]
4    for i in range (n - 1)
5       p = 0.3+0.7*p**2
6       s.append(p)
7    return (s)
```

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.